P-8

多重対数の無理数性について
Polylogarithms and the irrationality

○鷲尾 勇介
Washio Yusuke[1]

Abstract

Consider a polylogarithm defined as a value of the polylogarithmic function, a generalization of the logarithmic function, at a point inside the unit disk of the complex plane. In this talk, we show how to construct an asymptotic expansion of a linear combination of polylogarithmic functions to investigate arithmetic properties including the irrationality of the polylogarithm in the framework of Padé approximation.

1 Polylogarithmic function

はじめに，多重対数関数を定義する．s を 1 以上の有理整数とし，s 次多重対数関数を

$$\mathrm{Li}_s(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^s}, z\in\mathbb{C}, |z|\leqq 1(s=1 \text{ ならば } z\neq 1)$$

によって定義する．
多重対数関数は $|z|<1$ で絶対収束かつ一様収束し，またその定義から $\mathrm{Li}_{s+1}(z)=\int_0^z \frac{\mathrm{Li}_s(t)}{t}dt$ を満たす．
また $s=1$ のときは，$\mathrm{Li}_1(z)=-\log(1-z)=\int_0^z\frac{dt}{1-t}$ が成り立つ．

2 Results of Nikišin and Rivoal

1979 年，E. M. Nikišin[2] は有理数における s 次多重対数関数 $\mathrm{Li}_s(x)$ の値について $1,\mathrm{Li}_1(x),\mathrm{Li}_2(x),\cdots,\mathrm{Li}_s(x)$ が $\mathbb{Q}$ 上線型独立となる x の条件について，次を示した．

THEOREM (E. M. Nikišin)
有理数 $x=b/a$ について，$x<0$ $(b>0,\ a<0)$ かつ

$$|a|<\frac{1}{b^s}\exp\{-(s-1)(s\log s+s+(2s+1)\log 2)\}$$

を満たすならば，

$$1,\ \log(1-x),\ \mathrm{Li}_2(x),\ \mathrm{Li}_3(x),\cdots,\mathrm{Li}_s(x)$$

は $\mathbb{Q}$ 上線型独立である．

また 2003 年に T. Rivoal[3] は，Yu. V. Nesterenko[1] の方法を用いて多重対数で張られた線型空間の次元の下からの評価を与えた．

THEOREM (T. Rivoal)
s を 2 以上の有理整数とする．$\alpha=p/q\in\mathbb{Q}$ を $p,q\in\mathbb{Z}$, $\gcd(p,q)=1$, $0<|\alpha|<1$ を満たすようにとる．このとき，$^{\forall}\varepsilon>0$ に対してある有理整数 $A(\varepsilon,p,q)\geqq 1$ が存在し，次を満たす．即ち，$s\geqq A(\varepsilon,p,q)$ ならば，

$$\dim_{\mathbb{Q}}\{\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\mathrm{Li}_1(\alpha)+\cdots+\mathbb{Q}\mathrm{Li}_s(\alpha)\}>\frac{1-\varepsilon}{1+\log 2}\log s.$$

その系として次が示される．

COROLLARY (T. Rivoal)
$0<|\alpha|<1$ を満たす有理数 α について，集合 $\{\mathrm{Li}_k(\alpha):k=1,2,\cdots\}$ には無限個の無理数が属する．

これらの結果は，いずれも多重対数関数の線型結合の漸近展開が

$$\sum_{k=1}^{s}A_{kq}(z)\mathrm{Li}_k(1/z)-P_q(z)=\frac{c_{0(q)}}{z^{ns+q}}+\frac{c_{1(q)}}{z^{ns+q+1}}+\cdots \tag{1}$$

の形となるような有理数係数の多項式 $A_{kq}(z)$ および $P_q(z)$ を探すことから始まる．本稿ではこの多項式 $A_{kq}(z)$ および $P_q(z)$ の構成法について言及する．

3 Asymptotic expansion

$z\in\mathbb{C}$ を $|z|>1$ となるようにとる．$n\in\mathbb{N}$ を固定し，$q\in\mathbb{N}$ を $0\leqq q\leqq s$ を満たすようにとる．ここで有理数係数多項式 $A_{kq}(z)$ $(k=1,2,\cdots,s)$ および $P_q(z)$ に対し，

$$\sum_{k=1}^{s}A_{kq}(z)\mathrm{Li}_k(1/z)-P_q(z)=\frac{c_{0(q)}}{z^{ns+q}}+\frac{c_{1(q)}}{z^{ns+q+1}}+\cdots$$

とおく．ただし，$A_{kq}(z)$ $(k=1,2,\cdots,s)$ のうち少なくとも一つは恒等的に 0 でなく，$\deg A_{jq}(z)\leqq n$ $(j=1,2,\cdots,q)$，$\deg A_{jq}(z)\leqq n-1$ $(j=q+1,\cdots,s)$ を満たすものとする．このような多項式 $A_{kq}(z)$ および $P_q(z)$ の存在は，斉次一次方程式系の非自明解の存在性によって示すことができる．以下これらを具体的に構築する．
任意の $M\in\mathbb{N}$ に対して

$$\int_0^1 x^{M-1}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{k-1}dx=\frac{\Gamma(k)}{M^k}$$

が成り立つことから，

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_k(1/z)&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(1/z)^m}{m^k}\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^m\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^1 x^{m-1}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{k-1}dx\\&=\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^1\left(\log\frac{1}{x}\right)^{k-1}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{m-1}}{z^m}\right)dx.\end{aligned}$$

[1] 日大理工・院 (前)・数学

ここで $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{m-1}}{z^m}=\frac{1}{z-x}$ であるから，

$$\mathrm{Li}_k(1/z)=\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^1\frac{\left(\log\frac{1}{x}\right)^{k-1}}{z-x}dx$$

である．よって

$$\begin{aligned}&A_{kq}(z)\mathrm{Li}_k(1/z)\\&=\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^1\frac{A_{kq}(z)}{z-x}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{k-1}dx\\&=\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^1\frac{A_{kq}(z)-A_{kq}(x)}{z-x}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{k-1}dx\\&\quad+\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^1\frac{A_{kq}(x)}{z-x}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{k-1}dx.\end{aligned}$$

これを $I_1^{(k,q)}(z)+I_2^{(k,q)}(z)$ とおく ($I_1^{(k,q)}(z)$ は多項式)．
従って

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{s}A_{kq}(z)\mathrm{Li}_k(1/z)\\&=\sum_{k=1}^{s}I_1^{(k,q)}(z)+\int_0^1\sum_{k=1}^{s}\frac{A_{kq}(x)}{\Gamma(k)}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{k-1}\frac{dx}{z-x}.\end{aligned}$$

第 1 項の多項式の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{s}I_1^{(k,q)}(z)$ を $P_q(z)$ とおく．

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{s}A_{kq}(z)\mathrm{Li}_k(1/z)-P_q(z)\\&=\int_0^1\sum_{k=1}^{s}\frac{A_{kq}(x)}{\Gamma(k)}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{k-1}\frac{dx}{z-x}\\&=\frac{c_{0(q)}}{z^{ns+q}}+\frac{c_{1(q)}}{z^{ns+q+1}}+\cdots\end{aligned}$$

が成り立てばよい．
さて，

$$\int_0^1\sum_{k=1}^{s}\frac{A_{kq}(x)}{\Gamma(k)}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{k-1}\frac{dx}{z-x}=\frac{c_{0(q)}}{z^{ns+q}}+\cdots$$

であることと，$t=1,2,\cdots,ns+q-1$ に対して

$$\int_0^1\left\{\sum_{k=1}^{s}\frac{A_{kq}(x)}{\Gamma(k)}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{k-1}\right\}x^{t-1}dx=0 \qquad (2)$$

であることは同値である．
$t\geqq 1$ を有理整数として

$$R(t)=\int_0^1\left\{\sum_{k=1}^{s}\frac{A_{kq}(x)}{\Gamma(k)}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{k-1}\right\}x^{t-1}dx$$

とおく．多項式 $A_{kq}(x)$ を

$$A_{kq}(x)=\sum_{j=0}^{n-\varepsilon_k}c_{kj}^{(q)}x^j$$

とおく．ただし ε_k は

$$\varepsilon_k=\begin{cases}0 & (1\leqq k\leqq q),\\ 1 & (q+1\leqq k\leqq s)\end{cases}$$

とする．このとき，

$$\begin{aligned}R(t)&=\int_0^1\left\{\sum_{k=1}^{s}\frac{\sum_{j=0}^{n-\varepsilon_k}c_{kj}^{(q)}x^j}{\Gamma(k)}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{k-1}\right\}x^{t-1}dx\\&=\sum_{k=1}^{s}\left\{\sum_{j=0}^{n-\varepsilon_k}\frac{c_{kj}^{(q)}}{(t+j)^k}\right\}\\&=\sum_{k=1}^{q}\left\{\sum_{j=0}^{n}\frac{c_{kj}^{(q)}}{(t+j)^k}\right\}+\sum_{k=q+1}^{s}\left\{\sum_{j=0}^{n-1}\frac{c_{kj}^{(q)}}{(t+j)^k}\right\}\\&=\sum_{k=1}^{q}\frac{c_{kn}^{(q)}}{(t+n)^k}+\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{s}\frac{c_{kj}^{(q)}}{(t+j)^k}\right).\end{aligned}$$

従って t の関数 $R(t)t^s(t+1)^s\cdots(t+n-1)^s(t+n)^q$ は次数が $ns+q-1$ を超えない多項式であり，$R(1)=R(2)=\cdots=R(ns+q-1)=0$ である．よって

$$R(t)=\gamma\frac{(t-1)(t-2)\cdots(t-ns+q+1)}{t^s(t+1)^s\cdots(t+n-1)^s(t+n)^q}$$

とかける．ただし $\gamma\neq 0$．そこで $\gamma=1$ として

$$\begin{aligned}R(t)&=\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{s}\frac{c_{kj}^{(q)}}{(t+j)^k}\right)+\sum_{k=1}^{q}\frac{c_{kn}^{(q)}}{(t+n)^k}\\&=\frac{(t-1)(t-2)\cdots(t-ns+q+1)}{t^s(t+1)^s\cdots(t+n-1)^s(t+n)^q}\end{aligned}$$

と定める．
これは (2) を満たすので，これによって (1) を満たす多項式 $A_{kq}(z)\in\mathbb{Q}[z]$ および $P_q(z)\in\mathbb{Q}[z]$ が構成できた．

References

[1] Yu. V. Nesterenko, *On the linear independence of numbers,* Vestnik Moskov. Univ. Ser. I, Mat. Mekh. **1**, (1985), 46-49, English translation: Moscow Univ. Math. Bull. **40(1)**, (1985), 69-74.

[2] E. M. Nikišin, *On irrationality of the values of the function $F(x,s)$,* Mat.Sbornik vol.109(151) no.3(7), 410-417, (1979), English translation: Math.USSR. Sbornik, **37**, no.3, (1980), 381-388.

[3] T. Rivoal, *Indépendance linéaire des valeurs des polylogarithmes,* J. Théorie des Nombres de Bordeaux, **15**, no.2, (2003), 551-559.