H1-18

NURBS による 2 次元物体形状作成と運動解析

Creation of 2D object shape by NURBS and the motion analysis

○齋藤　良平[1]，野村　卓史[2]，長谷部　寛[2]

Ryohei Saito[1], Takashi Nomura[2], Hiroshi Hasebe[2]

Abstract: Shapes of 2D objects are created by using NURBS that is used in CAD in order to perform the motion analysis of those objects. The area, centroid, and moment of inertia of the object are calculated using the Gauss divergence theorem. The line integral is calculated by using the trapezoidal rule. The errors of the calculated values to the theoretical values are small. The motion of a heart shape object is analysed by Newmarkβ method successfully.

１．はじめに

有限要素法は構造解析や流体解析など幅広い工学分野で用いられているが，問題点としてメッシュ生成に多くの時間と労力がかかる．また CAD で作成された曲面形状を厳密に表現しきれない．そこでCAD で用いられる NURBS（Non-Uniform Rational B-spline）を有限要素の基底関数に用いたIGA（Isogeometric Analysis）という解析手法が提案されている [1]．

本研究ではNURBS を用いて物体形状を作成し，物体の運動解析を実施することを目的とする．

２．NURBS による曲線の表現

NURBS 基底関数は次式(1)で定義される．

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{k=1}^{n} N_{k,p}(\xi) w_k} \tag{1}$$

ここでR_i^pは NURBS 基底関数，w_iは重み，$N_{i,p}$は各成分の B-spline 基底関数，pは基底関数の次数，nは基底関数の数，iはノットベクトル$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_i, \cdots, \xi_{n+p+1}\}$の成分の番号である．

B-spline 基底関数$N_{i,p}$は以下のように逐次的過程により定義される．

次数p=0 のとき

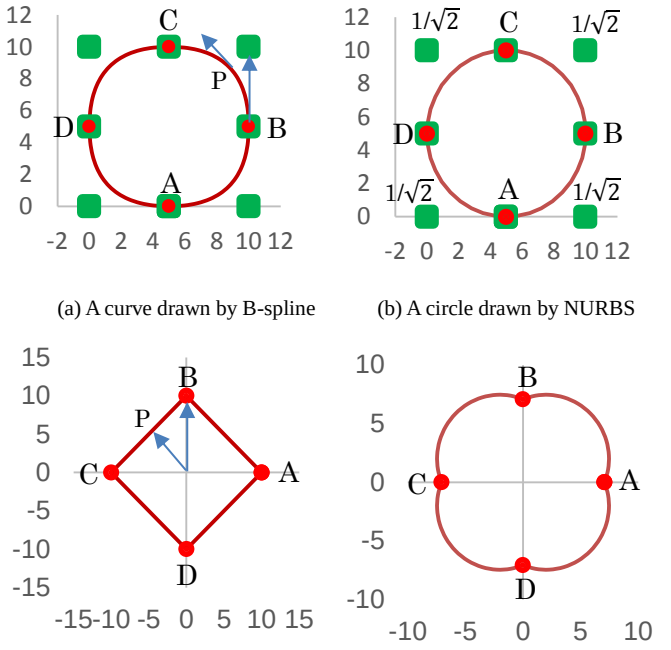
$$N_{i,p}(\xi) = \begin{cases} 1, & if\ \xi_i \le \xi < \xi_{i+1} \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{2}$$

次数p>0 のとき

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} + \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1} \tag{3}$$

ノットベクトルΞはノットξ_iの値が同じ，もしくは大きくなるように並べなければならない．ノットの個数はコントロールポイント数+曲線の次数+１個必要になり，始めと終わりのノットの数が同じにならなければならない．ここで NURBS 曲線は NURBS 基底関数とコントロールポイントの線形結合により表現できる．

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=0}^{n} R_i^p(\xi) \boldsymbol{B}_i \tag{4}$$



(a) A curve drawn by B-spline　(b) A circle drawn by NURBS

(c) Hodograph of the derivative of the B-spline curve (a)　(d) Hodograph of the derivative of the circle (b)

■—コントロールポイント$\boldsymbol{B}_i$，●—ノットξ_i

$\Xi = \{0,0,0,1,1,2,2,3,3,4,4,4\}$

$\boldsymbol{B}_i$	x	5	10	10	10	5	0	0	0	5
	y	0	0	5	10	10	10	5	0	0
w_i		1	1/√2	1	1/√2	1	1/√2	1	1/√2	1

Figure 1. Curves and hodograph of the derivatives

1: 日本大学・院（前）・土木　　2: 日大理工・教員・土木

ここで$\mathbf{C} = \langle x(\xi), y(\xi)\rangle^{\mathrm{T}}$は NURBS 曲線,$\boldsymbol{B}_i = \langle x_i, y_i\rangle^{\mathrm{T}}$はコントロールポイントである. Figure1 は B-spline と NURBS を用いて描いた曲線と曲線の導関数をホドグラフで示したものである. B-spline 曲線は重みがすべて 1 である.重みが 1 より小さい場合,NURBS 曲線はコントロールポイントから離れていく特性がある.

3．物体形状作成と面積, 慣性モーメントの算出

$\boldsymbol{B}_i$		w_i
x	y	1
5	0	$1/\sqrt{2}$
10	0	1
10	5	$1/\sqrt{2}$
10	7.5	1
7.5	7.5	$1/\sqrt{2}$
5	7.5	1
5	5	$1/\sqrt{2}$
5	7.5	1
2.5	7.5	$1/\sqrt{2}$
0	7.5	1
0	5	$1/\sqrt{2}$
0	0	1
5	0	$1/\sqrt{2}$

$\Xi = \{0,0,0,1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,6\}$

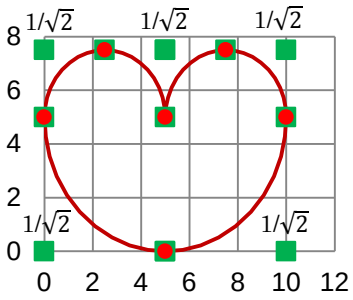


Figure 2. Heart-shape drawn by NURBS

NURBS 曲線を用いて, 半円を 3 つ組み合わせたハート型の物体形状を Figure2 に示す.面積,図心まわりの慣性モーメントはガウスの発散定理により算出することとする.

2 次元形状の場合,ガウスの発散定理は以下のように表される.

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}\right) dxdy = \int_\Gamma \left(F_x n_x + F_y n_y\right) ds \qquad (5)$$

ここで,Ωは物体が占める領域, Γは物体の境界,$\mathbf{n} = \langle n_x, n_y\rangle^{\mathrm{T}}$は境界Γ上の外向き法線ベクトルである.

面積の場合,被積分関数を以下のように与える.

$$F_x = \frac{1}{2}x,\ F_y = \frac{1}{2}y\ \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\right) \qquad (6)$$

その結果面積は次式のような線積分の式で表される.

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\int_0^{\xi_L} \left(x(\xi)\frac{dy}{d\xi} - y(\xi)\frac{dx}{d\xi}\right) d\xi \qquad (7)$$

ここで$dy/d\xi = n_x, dx/d\xi = -n_y$である.

次に慣性モーメントを算出する.$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$を物体の図心を原点とする座標系とすると,$\bar{z}$軸周りの断面二次極モーメント$I_{\bar{z}}$は次のように表される.

$$I_{\bar{z}} = \iint_\Omega (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) d\bar{x}d\bar{y} \qquad (8)$$

$I_{\bar{z}}$は次式のような線積分の式で表される.

$$I_{\bar{z}} = \frac{1}{3}\int_0^{\xi_L} \left(\bar{x}^3\frac{dy}{d\xi} - \bar{y}^3\frac{dx}{d\xi}\right) d\xi \qquad (9)$$

Figure2 のハート型について, 式(7),(9)に台形則を適用し,数値積分した結果を Table 1 に示す.

Table 1. Characteristic values of the heart-shape

	積分間隔	計算値	理論値	誤差
A	$\Delta\xi = 1/100$	58.90	58.90	0%
$\frac{x_G}{(G_y/A)}$	$\Delta\xi = 1/100$	5.008	5	0.16%
$\frac{y_G}{(G_x/A)}$	$\Delta\xi = 1/100$	3.939	3.939	0%
I_G	$\Delta\xi = 1/100$	608.6	608.9	-0.05%

4．運動解析

Newmarkβ 法を用いて, Figure2 のハート型をした単位厚さの板状物体の運動解析を行った.Figure3 は運動解析結果を軌跡がわかるように図示したものである.

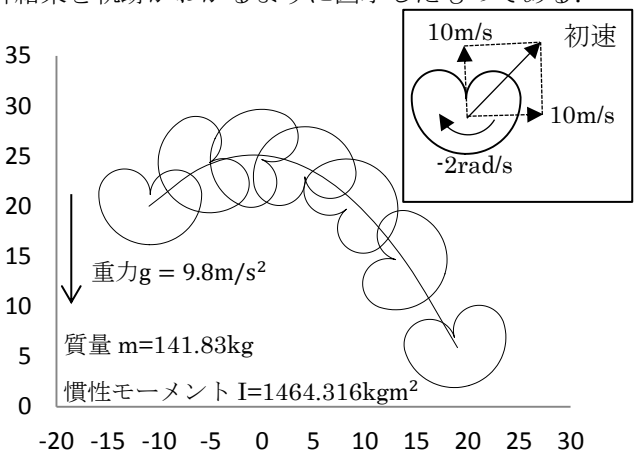


Figure3. Trajectory and rotational motion of the heart-shape

5．まとめ

CAD で用いられる NURBS を用いて 2 次元物体形状を作成し, 運動解析を行った. 物体形状は有限要素法では表現しきれない厳密な形状を描くことができた. 面積, 図心, 慣性モーメントの計算はガウスの発散定理を用いて計算し, 理論値との誤差が少ない値を得ることができた. 今後は 3 次元の物体を作成し, その運動解析を行う予定である.

参考文献

1) J. A. Cottrell, T. J.R. Hughes, Y. Bazilevs : Isogeometric Analysis Toward Integration of CAD and FEA, WILEY, 2009.

2) 齋藤良平,野村卓史,長谷部寛 : NURBS による物体形状作成と運動解析,平成 27 年度土木学会全国大会第 70 回年次学術講演会,CS8-008,2015.