O-13

輻射反作用を受ける粒子の解析力学と量子化

Analytical mechanics and quantization of a particle subjected to radiation reaction

○藤原侑樹[1]，　中野邦彦[2]，　出口真一[3]
*Yuki Fujiwara[1], Kunihiko Nakano[2], Shinichi Deguchi[3]

Abstract : We study the analytical mechanics and quantization of a particle subjected to radiation reaction.

1．導入

加速度運動する荷電粒子は, 自身が放射する電磁波により, 反作用を受けることが知られている. この輻射反作用は, Lorentz と Abraham によって 100 年以上前に論じられ, 現在でも様々な視点から研究されている.

単位時間に粒子が失うエネルギーは, Larmor の公式 $W = \gamma \ddot{\boldsymbol{x}} \cdot \ddot{\boldsymbol{x}} \left(\gamma := \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\right)$ で与えられる. ここで, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ は粒子の位置ベクトルであり, e は粒子の電荷である. この式から, 円運動する粒子が 1 周期の間に放出するエネルギーは次式のように得られる：

$$W' = \gamma \int_0^T \ddot{\boldsymbol{x}} \cdot \dddot{\boldsymbol{x}}\, dt = -\gamma \int_0^T \dddot{\boldsymbol{x}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}\, dt\,. \tag{1}$$

式 (1) から粒子が受ける力は $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} = \gamma \dddot{\boldsymbol{x}}$ と求まる. これにより輻射の反作用を取り入れた荷電粒子の運動方程式は

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = e\boldsymbol{E} + e\dot{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{B} + \gamma \dddot{\boldsymbol{x}} \tag{2}$$

となる. ここで, m は粒子の質量, $\boldsymbol{E}$ は外部電場, $\boldsymbol{B}$ は外部磁場である. 式 (2) は, 一般的な運動をする荷電粒子に対しても成立し, Abraham-Lorentz(AL) 方程式と呼ばれている. この方程式は, $\boldsymbol{x}$ の時間に関する 3 階微分を含むため, 暴走解などの現実にそぐわない運動を表す解をもつことが知られている.

本研究では, 定磁場中を運動し, かつ輻射反作用を受ける粒子の古典的な運動を調べる. さらに, この力学系に対する解析力学を構成し, それをもとに系の正準量子化を試みる.

2．定磁場中の粒子の AL 方程式

初めに, 定磁場中の粒子の AL 方程式を考察する. いま, 位置ベクトルを $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ と表し, 電場がなく, 定磁場が第 3 軸方向を向いている場合 ($\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_3$, B は定数) を考える. この場合, 式 (2) は次のように表せる：

$$\tau \dddot{x}_1 - \ddot{x}_1 + \omega_B \dot{x}_2 = 0\,, \tag{3a}$$

$$\tau \dddot{x}_2 - \ddot{x}_2 + \omega_B \dot{x}_1 = 0\,, \tag{3b}$$

$$\tau \dddot{x}_3 - \ddot{x}_3 = 0\,. \tag{3c}$$

ここで, $\omega_B := \frac{|e|B}{m}$, $\tau := \frac{\gamma}{m}$ である. いま, $\dot{x}_3 = 0$ として, 粒子が x_1x_2 平面上を運動する場合を考える. さらに, x_1 と x_2 を $x := x_1 + ix_2$ と複素数にまとめると, 式 (3a) と (3b) は次式のように書ける：

$$\tau \dddot{x} - \ddot{x} - i\omega_B \dot{x} = 0\,. \tag{4}$$

粒子の初速度を $\tilde{v}_1$ として, 式 (4) の解を $\dot{x}(t) = \tilde{v}_1 \mathrm{e}^{i\omega t}$ (ω は複素定数) とおく. ここで, $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ (ω_1 と ω_2 は実定数) とおくと, 解は $\dot{x}(t) = \tilde{v}_1 \mathrm{e}^{-\omega_2 t}\mathrm{e}^{i\omega_1 t}$ となり, 減衰・増幅を表す項と周期運動を表す項に分けることができる. この解を式 (4) に代入すると, ω に関する 2 次方程式が得られ, それを解くことで 2 つの解 ω_+ と ω_- が得られる.

輻射反作用がない場合 ($\tau \to 0$), ω_+ は $\omega_+ = -\omega_B$ となり, この解はサイクロトロン運動を再現する. 一方 ω_- は $\omega_- = \omega_B - i\infty$ となるため, 意味を持たないものとなる.

次に, 輻射反作用がある場合 ($\tau \neq 0$) の粒子の軌道を考察する. まず, $\omega = \omega_+$ の場合, 粒子は輻射反作用により半径が減衰する螺旋軌道を描く. 一方, $\omega = \omega_-$ の場合, 粒子は逆向きに運動し, 半径が急激に増大する螺旋軌道を描く. このような解は, AL 方程式で知られている暴走解の一種である. 以上のように, $\omega = \omega_+$ の場合は現実の物理現象を表すが, $\omega = \omega_-$ の場合は現実に起こりえない現象を表す.

3．輻射反作用を受ける粒子の解析力学

Bateman が与えた減衰する調和振動子のラグランジアン [1] を参考にし, 定磁場中の粒子の AL 方程式 (4) を与えるラグランジアンを次式のように構成する：

$$\begin{aligned} L = {} & i\tau\left(\dot{\bar{w}}\dot{v} - \dot{w}\dot{\bar{v}}\right) + i\left(\bar{w}\dot{v} - w\dot{\bar{v}}\right) - \omega_B\left(\bar{w}v + w\bar{v}\right) \\ & - \frac{1}{\omega_B}\left(\bar{\lambda}\mu + \bar{\mu}\lambda\right) - \bar{\lambda}\left(v - \dot{x}\right) - \lambda\left(\bar{v} - \dot{\bar{x}}\right) \\ & - \bar{\mu}\left(w - \dot{y}\right) - \mu\left(\bar{w} - \dot{\bar{y}}\right)\,. \end{aligned} \tag{5}$$

ここで, y は仮想的な複素座標変数であり, v, w, λ, μ は補助的な複素変数である. ラグランジアン (5) から導かれる Euler-Lagrange 方程式から, 座標変数に関する次の運動方程式が得られる：

$$\tau \dddot{x} - \ddot{x} - i\omega_B \dot{x} = 0\,, \tag{6a}$$

$$\tau \dddot{\bar{x}} - \ddot{\bar{x}} + i\omega_B \dot{\bar{x}} = 0\,, \tag{6b}$$

$$\tau \dddot{y} + \ddot{y} - i\omega_B \dot{y} = 0\,, \tag{6c}$$

$$\tau \dddot{\bar{y}} + \ddot{\bar{y}} + i\omega_B \dot{\bar{y}} = 0\,. \tag{6d}$$

式 (6a) は, 式 (4) に他ならない. また, 式 (6b) は式 (6a) に $\mathcal{P}$ 変換 ($x_1 \to x_1, x_2 \to -x_2$) を施したものであり, 式

[1] 日大理工・院 (前)・量子　[2] 錦城高等学校　[3] 日大・量科研

(6c) は式 (6a) に $\mathcal{T}$ 変換 ($t \to -t$) を施し, $x(-t)$ を $\bar{y}(t)$ に置き換えたものである. さらに, 式 (6d) は式 (6a) に $\mathcal{PT}$ 変換を施し, $\bar{x}(-t)$ を $y(t)$ に置き換えたものである.

4．輻射反作用がない場合の正準形式と量子化

簡単のため, まず輻射反作用がない場合($\tau = 0$)の正準形式を考察する. 式 (5) から, ラグランジアンは

$$L = i\left(\bar{w}\dot{v} - w\dot{\bar{v}}\right) - \omega_B(\bar{w}v + w\bar{v}) - \frac{1}{\omega_B}\left(\bar{\lambda}\mu + \lambda\bar{\mu}\right) - \bar{\lambda}\left(v - \dot{x}\right) - \lambda\left(\bar{v} - \dot{\bar{x}}\right) - \bar{\mu}\left(w - \dot{y}\right) - \mu\left(\bar{w} - \dot{\bar{y}}\right) \quad (7)$$

である. 正準座標は, v, $\bar{v}$, w, $\bar{w}$, x, $\bar{x}$, y, $\bar{y}$, λ, $\bar{\lambda}$, μ, $\bar{\mu}$ であり, これに対応する正準運動量は, $P_v = i\bar{w}$, $P_{\bar{v}} = -iw$, $P_w = 0$, $P_{\bar{w}} = 0$, $P_x = \bar{\lambda}$, $P_{\bar{x}} = \lambda$, $P_y = \bar{\mu}$, $P_{\bar{y}} = \mu$, $P_\lambda = 0$, $P_{\bar{\lambda}} = 0$, $P_\mu = 0$, $P_{\bar{\mu}} = 0$ のように得られる. また, 式 (7) のルジャンドル変換から, 正準ハミルトニアン

$$H_{\mathrm{C}} = \omega_B\left\{\left(v + \frac{\mu}{\omega_B}\right)\left(\bar{w} + \frac{\bar{\lambda}}{\omega_B}\right) + \left(\bar{v} + \frac{\bar{\mu}}{\omega_B}\right)\left(w + \frac{\lambda}{\omega_B}\right)\right\} \quad (8)$$

が求まる. 上で得られた運動量の表式は, すべて拘束条件とみなされるので, Dirac の手法に基づいてこれらの拘束条件の分類を行うと, すべて第 2 類拘束条件であることがわかる. 従って, Dirac 括弧は

$$\{v, P_v\}_{\mathrm{D}} = 1\,,\ \{\bar{v}, P_{\bar{v}}\}_{\mathrm{D}} = 1\,,\ \{x, P_x\}_{\mathrm{D}} = 1\,,\ \{\bar{x}, P_{\bar{x}}\}_{\mathrm{D}} = 1\,,\ \{y, P_y\}_{\mathrm{D}} = 1\,,\ \{\bar{y}, P_{\bar{y}}\}_{\mathrm{D}} = 1 \quad (9)$$

となり, その他の Dirac 括弧は 0 となる. また, 全ハミルトニアンは次式のようになる：

$$H_{\mathrm{T}} = i\omega_B(\bar{v}P_{\bar{v}} - vP_v) + i\left(P_yP_{\bar{v}} - P_{\bar{y}}P_v\right) + vP_x + \bar{v}P_{\bar{x}} + \frac{1}{\omega_B}\left(P_yP_{\bar{x}} + P_{\bar{y}}P_x\right)\,. \quad (10)$$

次に, 上で構成した正準形式をもとに, 正準量子化を行う. 正準変数を演算子に置き換え, Dirac 括弧 (9) を次のような正準交換関係に置き換える：

$$[\hat{v}, \hat{P}_v] = i\hbar\,,\ [\hat{\bar{v}}, \hat{P}_{\bar{v}}] = i\hbar\,,\ [\hat{x}, \hat{P}_x] = i\hbar\,,\ [\hat{\bar{x}}, \hat{P}_{\bar{x}}] = i\hbar\,,\ [\hat{y}, \hat{P}_y] = i\hbar\,,\ [\hat{\bar{y}}, \hat{P}_{\bar{y}}] = i\hbar\,. \quad (11)$$

ここで, その他の交換関係は 0 である. 全ハミルトニアン (10) において, 正準変数を演算子に置き換え, Weyl 順序をとると, 次のハミルトニアン演算子が得られる：

$$\hat{H}_{\mathrm{T}} = i\omega_B\left\{\left(\hat{\bar{v}} + \frac{\hat{P}_y}{\omega_B}\right)\left(\hat{P}_{\bar{v}} - i\frac{\hat{P}_{\bar{x}}}{\omega_B}\right) - \left(\hat{v} + \frac{\hat{P}_{\bar{y}}}{\omega_B}\right)\left(\hat{P}_v + i\frac{\hat{P}_x}{\omega_B}\right)\right\}\,. \quad (12)$$

演算子 $\hat{\bar{v}}' := \hat{\bar{v}} + \frac{\hat{P}_y}{\omega_B}$, $\hat{P}'_{\bar{v}} := \hat{P}_{\bar{v}} - i\frac{\hat{P}_{\bar{x}}}{\omega_B}$, $\hat{v}' := \hat{v} + \frac{\hat{P}_{\bar{y}}}{\omega_B}$, $\hat{P}'_v := \hat{P}_v + i\frac{\hat{P}_x}{\omega_B}$ を定義し, 交換関係 (11) を用いると, $[\hat{\bar{v}}', \hat{P}'_{\bar{v}}] = i\hbar$, $[\hat{v}', \hat{P}'_v] = i\hbar$ が得られる. また, $\hat{\bar{v}}'$, $\hat{P}'_{\bar{v}}$, $\hat{v}'$, $\hat{P}'_v$ を用いて, ハミルトニアン演算子 (12) を書き換えると, 次式のようになる：

$$\hat{H}_{\mathrm{T}} = i\omega_B\left(\hat{\bar{v}}'\hat{P}'_{\bar{v}} - \hat{v}'\hat{P}'_v\right)\,. \quad (13)$$

さらに, 生成消滅演算子 a_v, $a_v^\dagger$, b_v, $b_v^\dagger$ を

$$a_v := \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\hat{v}' + i\hat{P}'^{\dagger}_v\right)\,,\ a_v^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\hat{v}'^{\dagger} - i\hat{P}'_v\right)\,, \quad (14a)$$

$$b_v := \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\hat{v}'^{\dagger} + i\hat{P}'_v\right)\,,\ b_v^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\hat{v}' - i\hat{P}'^{\dagger}_v\right) \quad (14b)$$

と定義すると, $[a_v, a_v^\dagger] = 1$, $[b_v, b_v^\dagger] = 1$ が成り立つ. また, 随伴共役について, $\hat{v}'^{\dagger} := \hat{\bar{v}}'$, $\hat{P}'^{\dagger}_v := \hat{P}'_{\bar{v}}$ と定義する. 式 (14a) と (14b) を用いて, ハミルトニアン演算子 (13) を生成消滅演算子で表すと

$$\hat{H}_{\mathrm{T}} = \hbar\omega_B\left(N_a - N_b\right) \quad (15)$$

となる. ただし, N_a と N_b は $N_a := a_v^\dagger a_v$, $N_b := b_v^\dagger b_v$ で定義される数演算子である. いま, (素朴な) 真空状態 $|0\rangle$ を, $a_v|0\rangle = b_v|0\rangle = 0$ で定義する. このとき, 固有値方程式 $N_a|n_a, n_b\rangle = n_a|n_a, n_b\rangle$, $N_b|n_a, n_b\rangle = n_b|n_a, n_b\rangle$ が成り立つため, $\hat{H}_{\mathrm{T}}$ の固有値 (エネルギー固有値) が

$$E = \hbar\omega_B(n_a - n_b),\ (n_a, n_b = 0, 1, 2\cdots) \quad (16)$$

と求まる. ここで, n_b は上限がないため, E は不定値となることに注意する.

式 (12) のハミルトニアンを考察することで, エネルギー固有状態が縮退していることがわかる. また, 式 (16) から, Landau 準位に相当する項 $\hbar\omega_B n_a$ が得られていることがわかる. エネルギー固有値が不定値になるのは, 仮想的な力学変数として, y とそれに付随する補助変数 w を取り入れたためと考えられる.

5．まとめと今後の課題

本研究では, 初めに定磁場中の輻射反作用を受ける粒子の軌道の解析を行った. その結果, 半径が減衰する解と, 半径が急激に増大する解 (暴走解) が得られた. また, Bateman により与えられた減衰調和振動子のラグランジアンを参考にして, 定磁場中の粒子の AL 方程式を与えるラグランジアンを構成し, 輻射反作用がない場合について, 量子化を行った. その結果, Landau 準位が得られ, エネルギーの縮退もみられた.

本講演では輻射反作用がある場合の量子化を試みる. また, エネルギー固有値の不定値の問題を解決するために, 真空の定義の変更も論じる.

参考文献

[1] H. Bateman, Phys. Rev. **38** 815 (1931).

[2] A. C. R. Mendes, F. I. Takakura, C. Neves, W. Oliveria. Eur. Phys. J. C **45**, 257-261(2006).

[3] 九後汰一郎, ゲージ理論の量子論 I（培風館, 1989）.