

dRGT Massive Gravity 理論とその解について dRGT Massive Gravity Theory and its Solution

○木野戸伸¹, 三輪光嗣²*Shin Kinoto¹, Akitsugu Miwa²

Abstract : We review Fierz-Pauli mass term, dRGT theory and its solution. A consistent mass term which can be added to general relativity is known as the Fierz-Pauli mass term. If one extends the Fierz-Pauli mass term to a non-linear potential naively, then the theory has a ghost. The dRGT theory avoids this ghost by choosing a certain form of the potential, and we see that this theory has the Schwarzschild-de Sitter solution.

1. 導入

重力は一般相対性理論で記述されるが, この理論はいま観測されている宇宙の加速膨張の源として宇宙項を導入する. しかし, 現在の宇宙膨張に必要な宇宙項の値は自然に期待される真空エネルギーのスケールよりも小さな値であり, この問題は宇宙項問題と呼ばれる.

宇宙項問題を解決する試みの一つとして, 重力理論に質量項を加え, その質量が膨張宇宙の源として働く Massive Gravity 理論が存在する [1]. 質量項がある場合の重力理論は, 一般相対性理論と比較して遠方まで重力場が届かないので, 遠方では宇宙膨張が加速されると期待できる.

Massive Gravity 理論では, 質量項はゴーストを回避できるが, 非線形な相互作用項はゴーストを含んでしまう [2]. しかし, 最近になって相互作用項でもゴーストを回避する理論が de Rham, Gabadadze, Tolley によって提案された (dRGT 理論) [3]. ここでは, まず重力理論にゴーストを含まない質量項を加え [4], この質量項に素朴な形で非線形項を加えるとゴーストが現れることを示す. 次に dRGT 理論を紹介し, この理論が Schwarzschild-de Sitter 解を持つことを示す [5].

2. Fierz-Pauli 質量項

線形な理論における $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ のラグランジアン
の質量項を一般的に表すと次式になる.

$$\mathcal{L}_{mass} = -\frac{1}{8}m^2(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - Ah^2) \quad (1)$$

ここで, m は質量, A は定数である. また, $h = h^\mu_\mu$ であり, 添え字の上げ下げは Minkowski 計量で行う. (1) 式は一般座標変換の下で対称性を破るので, この対称性を回復させるために Stückelberg 場 χ_μ を導入し, $h_{\mu\nu}$ を $h_{\mu\nu} + 2\partial_{(\mu}\chi_{\nu)}$ で置き換える. その結果, ラグランジアンには χ_μ の運動項が現れ, $\chi_\mu = A_\mu + \partial_\mu\pi$ ($\partial_\mu A^\mu = 0$) と分解したとき, π に対する高次の時間微分が生じる.

$$\mathcal{L}_{mass} = \frac{1}{2}m^2(1-A)\partial_\mu\partial_\nu\pi\partial^\mu\partial^\nu\pi$$

$$+ (\pi : \text{total derivative}) + \cdots \quad (2)$$

このことは一般には理論がゴーストを含むことを意味する. これを避けるため $A = 1$ とすると, (1) 式は

$$\mathcal{L}_{FP} = -\frac{1}{8}m^2((h_{\mu\nu} + 2\partial_{(\mu}\chi_{\nu)})^2 - (h + 2\partial_\alpha\chi^\alpha)^2) \quad (3)$$

となる. (3) 式を Fierz-Pauli 質量項と呼ぶ [4]. (2) 式より π のみで書かれる高階微分項は全微分項のみとなる.

3. 非線形項と Boulware-Deser ゴースト

今は線形な理論を考えているので, 大きく曲がった空間を考えることができない. よって次に, この理論を非線形な理論に拡張する. まず, 一般座標変換の下で $h_{\mu\nu}$ はテンソルではないので, 非線形なラグランジアンは共変性を破る. この共変性を回復させるため計量を次式のように書き換える.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{M_{Pl}}h_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} + \frac{1}{M_{Pl}}H_{\mu\nu} \quad (4)$$

ただし, $f_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi^a(x)\partial_\nu\phi^b(x)\eta_{ab}$ である. また, M_{Pl} はプランクスケール質量, ϕ^a は Stückelberg スカラー場である. この書き換えにより $H_{\mu\nu}$ はテンソルとなり, これを用いて一般座標変換の下で不変なラグランジアンを書くことができる.

まず, (3) 式の最も素朴な非線形化は

$$\mathcal{L}_{FP} = -\frac{1}{8}m^2\sqrt{-g}(\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2) \quad (5)$$

となる. ただし $\langle H^n \rangle = H^{\mu_n}_{\mu_1}H^{\mu_1}_{\mu_2}\cdots H^{\mu_{n-1}}_{\mu_n}$ であり, 添え字の上げ下げは $g_{\mu\nu}$ およびその逆行列で行う. 実際に (5) 式の線形な部分を見れば, $\phi^a = x^a - \frac{1}{M_{Pl}}\chi^a$ とすると $H_{\mu\nu} \approx h_{\mu\nu} + 2\partial_{(\mu}\chi_{\nu)}$ なので, (3) 式と一致する. しかし, (5) 式は再びゴーストを含む. これを簡単に見るため,

$$h_{\mu\nu} = 0, \quad \phi^a = x^a - \frac{1}{m^2M_{Pl}}\eta^{ab}\partial_b\pi \quad (6)$$

とすると, (5) 式は

$$\mathcal{L}_{FP} = -\frac{1}{2m^2}([\Pi^2] - [\Pi]^2) + \frac{1}{2M_{Pl}m^4}([\Pi^3] - [\Pi^2][\Pi])$$

¹ 日大理工・院 (前)・物理 ² 日大理工・教員・物理

$$+ \frac{1}{2M_{Pl}^2 m^6} ([\Pi^4] - [\Pi^2]^2) \quad (7)$$

となる．ただし $\Pi_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu \pi$ である．また， $[\Pi^n] = \Pi^{\mu_n}_{\mu_1} \Pi^{\mu_{n-1}}_{\mu_2} \cdots \Pi^{\mu_1}_{\mu_n}$ であり，添え字の上げ下げは Minkowski 計量で行う．一項目は前節で議論した π の全微分項に対応している．二・三項目は π に対する高次の微分項であり，ゴーストが生じる．このようなゴーストを Boulware-Deser ゴースト (BD ゴースト) と呼ぶ [2]．

4. dRGT 理論

前節の (7) 式では二・三項目が全微分項ではなかったため BD ゴーストが現れた．よって，まず非線形項を含め $\Pi_{\mu\nu}$ から作られる全微分項を考える．実際に書き下すと

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{der}^{(2)}(\Pi) &= [\Pi]^2 - [\Pi^2] \\ \mathcal{U}_{der}^{(3)}(\Pi) &= [\Pi]^3 - 3[\Pi][\Pi^2] + 2[\Pi^3] \\ \mathcal{U}_{der}^{(4)}(\Pi) &= [\Pi]^4 - 6[\Pi^2][\Pi]^2 + 8[\Pi^3][\Pi] + 3[\Pi^2]^2 - 6[\Pi^4] \end{aligned}$$

となる [6]．

次に，(6) 式の場合に $\Pi_{\mu\nu}$ と一致するテンソル K^μ_ν を次のように定義する．

$$\begin{aligned} K^\mu_\nu &= \delta^\mu_\nu - (\sqrt{\mathbb{I} - H})^\mu_\nu \\ &= \delta^\mu_\nu - (\sqrt{g^{-1}f})^\mu_\nu \end{aligned}$$

ただし，添え字の上げ下げは $g_{\mu\nu}$ およびその逆行列で行う．実際に (6) 式を代入すると $K_{\mu\nu}$ が $\Pi_{\mu\nu}$ と一致することは容易に確認できる．このような K^μ_ν を用いて，ゴーストを含まないラグランジアンを次式のように書き下すことができる．

$$\mathcal{L} = \frac{M_{Pl}^2}{2} \sqrt{-g} [R + m^2 \mathcal{L}_{der}] \quad (8)$$

ただし $\mathcal{L}_{der}$ は α_3, α_4 を任意の定数として，

$$\mathcal{L}_{der} = \mathcal{L}_{der}^{(2)} + \alpha_3 \mathcal{L}_{der}^{(3)} + \alpha_4 \mathcal{L}_{der}^{(4)} \quad (9)$$

$$\mathcal{L}_{der}^{(2)} = \langle K \rangle^2 - \langle K^2 \rangle$$

$$\mathcal{L}_{der}^{(3)} = \langle K \rangle^3 - 3\langle K \rangle \langle K^2 \rangle + 2\langle K^3 \rangle$$

$$\mathcal{L}_{der}^{(4)} = \langle K \rangle^4 - 6\langle K^2 \rangle \langle K \rangle^2 + 8\langle K^3 \rangle \langle K \rangle + 3\langle K^2 \rangle^2 - 6\langle K^4 \rangle$$

と定義される．この理論は dRGT 理論と呼ばれる [3]．

(8) 式において $g_{\mu\nu}$ で変分をとり運動方程式を立てると

$$G_{\mu\nu} + m^2 X_{\mu\nu} = 0 \quad (10)$$

が得られる．ここで， $G_{\mu\nu}$ は Einstein テンソルであり， $X_{\mu\nu}$ は

$$X_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_{der}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{der} \quad (11)$$

である．具体的には

$$\begin{aligned} X_{\mu\nu} &= -\langle K \rangle g_{\mu\nu} + K_{\mu\nu} \\ &+ \alpha \left(K_{\mu\nu} \langle K \rangle - (K^2)_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\langle K \rangle^2 - \langle K^2 \rangle) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \beta \left(\frac{1}{2} \langle K \rangle^2 K_{\mu\nu} - \langle K \rangle (K^2)_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \langle K^2 \rangle K_{\mu\nu} + (K^3)_{\mu\nu} \right. \\ &\left. - \frac{1}{6} g_{\mu\nu} (\langle K \rangle^3 - 3\langle K \rangle \langle K^2 \rangle + 2\langle K^3 \rangle) \right) \end{aligned} \quad (12)$$

となる．ただし α_3, α_4 は α, β を用いて， $\alpha_3 = \frac{\alpha-1}{3}$ ， $\alpha_4 = \frac{\beta-\alpha+1}{12}$ と置き換えた．

5. Schwarzschild-de Sitter 解

次のような $g_{\mu\nu}$ を考える．

$$ds^2 = -n(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + S^2 r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (13)$$

ここで S は定数である．ユニタリーゲージ ($\phi^a = x^a$) を考えて空間座標を極座標 ($x^0 = t$ ， $x^1 = r \cos \theta$ ， $x^2 = r \sin \theta \cos \phi$ ， $x^3 = r \sin \theta \sin \phi$) にとると，

$$f_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$$

となる．このとき， $\alpha^2 = \beta$ ， $\frac{1}{\alpha} = \frac{1-S}{S}$ と条件を置けば， $X^\mu_\nu = \frac{1}{\alpha} \delta^\mu_\nu$ となるので (10) 式は

$$G_{\mu\nu} + \frac{m^2}{\alpha} g_{\mu\nu} = 0 \quad (14)$$

となり， $\frac{m^2}{\alpha}$ は宇宙項の役割を果たしていることがわかる．この方程式を解くと，解は

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{c}{S^2} \left(1 + \frac{S^2 A}{r} - \frac{S^2 m^2}{3\alpha} r^2 \right) dt^2 \\ &+ \frac{S^2 dr^2}{\left(1 + \frac{S^2 A}{r} - \frac{S^2 m^2}{3\alpha} r^2 \right)} + S^2 r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \end{aligned} \quad (15)$$

となる．ただし c, A は積分定数である．この解は Schwarzschild-de Sitter 解である [5]．

6. まとめと今後の課題

今回は Massive Gravity 理論のゴーストを含まないラグランジアンとその解について議論した．この解は一般相対論でも存在する解であるため，Massive Gravity 理論特有の解を探ることが課題の一つである．また，ホログラフィー原理への応用を考えると 5 次元の理論について調べることも興味深い課題の一つである．

参考文献

- [1] C. de Rham, Living Rev. Rel. **17**, 7 (2014).
- [2] D. G. Boulware and S. Deser, Phys. Rev. D **6**, 3368 (1972).
- [3] C. de Rham, G. Gabadadze and A. J. Tolley, Phys. Rev. Lett. **106**, 231101 (2011).
- [4] M. Fierz and W. Pauli, Proc. Roy. Soc. Lond. A **173**, 211 (1939).
- [5] H. Kodama and I. Arraut, PTEP **2014**, 023E02 (2014).
- [6] C. de Rham and G. Gabadadze, Phys. Rev. D **82**, 044020 (2010).