O-9

ブラックホール周辺における粒子運動
Particle motions around a Black Hole

○藤田麻希子 [1], 根來均 [2]
*Makiko Fujita[1], Hitoshi Negoro[2]

Abstract : We can not directly observe black holes because even the light can not escape from them. Instead, we observe X-rays emitted from an accretion disk formed by the plasma. To discuss the validity of the innermost radius of the accretion disk obtained from observed X-ray spectra, we may need to consider not only general relativistic effects but also the effect of the radial inflow motion of the accretion matter which is hardly taken into account in current energy spectrum models. We are calculating energy spectra of the accretion disk by considering these effects. Before investigating the inflow accretion, we report here results from numerical calculation of particle motions around a black hole taking the relativistic effects into account.

1　序

ブラックホールは光を吸収するので直接観測はできない. 従って, 周辺で運動をしているプラズマで形成される降着円盤から発される X 線を元に議論を進めていく. この観測された X 線スペクトルから求められる降着円盤の最内縁半径を議論するには, 現在多くの降着円盤モデルで議論されている相対論効果を考慮することだけでは不十分かもしれない. そこで, 本研究では相対論効果に加えてインフローの効果も考慮したスペクトルを計算し, 観測結果と比較する事を目的とする. インフローとは降着円盤内での動径方向の内向きの運動のことを言う.

ここでは, 粒子の運動を見ていくために相対論効果によるブラックホール周辺の粒子運動を数値計算していった. 数値計算の精度を調べるため, 相対論効果を考慮しない古典力学における粒子運動の計算を行う. さらに共動系における相対論効果を考慮した場合の粒子運動を計算し, 粒子の振る舞いを調べていく. ここで, ブラックホールはシュバルツシルド・ブラックホールを仮定して計算した.

2　粒子運動

2.1　古典力学

数値計算の精度を調べるために, 近日点移動しない古典力学の式を使用した. 古典力学の場合における粒子の持つ全エネルギーを $E_{\rm cl}$, ブラックホールから粒子までの距離を r, 始点からの角度を ϕ とすると, エネルギーの保存則より古典力学における粒子の運動の方程式は

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2E_{\rm cl}}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{l_{\rm cl}^2}{m^2r^2}} \tag{1}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{l_{\rm cl}}{mr^2} \tag{2}$$

$$E_{\rm cl} \equiv -\frac{GMm}{r_0}(1-L) \tag{3}$$

$$l_{\rm cl} \equiv \sqrt{2GMm^2r_0L} \tag{4}$$

と表される. 楕円運動は平面を仮定している. ここで, G は重力加速度, M はブラックホールの質量, m は粒子の質量, $l_{\rm cl}$ は古典力学における角運動量, r_0 は r の初期値である. エネルギーと角運動量を決定するため, $dr/dt = 0$ の時の有効ポテンシャルで規格化したものを L とし, そこに値を与えて計算していく. $L = 0$ では自由落下, $0 < L < 0.5$ では遠日点を始点とした運動, $L = 0.5$ では円運動, $0.5 < L$ では近日点を始点とした運動をする. また数値計算の際, r 方向に初速を付けて計算し始める.

2.2　相対論効果を考慮する場合

相対論効果を考慮した場合の粒子の運動は次式で行った [1]. この計算をする際も古典力学の時と同様, r 方向に初速を付けてから計算している.

$$\frac{dr}{d\tau} = \sqrt{\frac{2E_{\rm cl}}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{l_{\rm rel}^2}{m^2r^2} + \frac{2GMl_{\rm rel}^2}{m^2c^2r^3}} \tag{5}$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{l_{\rm rel}}{mr^2} \tag{6}$$

$$l_{\rm rel} \equiv \sqrt{\frac{2GMm^2r_0^2L}{(r_0 - \frac{3GM}{c^2})}} \tag{7}$$

ここで, $l_{\rm rel}$ は相対論を考慮した際の角運動量, c は光速である. また, τ は粒子の固有時間である. $E_{\rm cl}$ は計算上簡単にするために, 相対論効果を考慮した際の全エネルギー $E_{\rm rel}$ から次式の関係を使って代入したものである.

[1]日大理工・院（前）・物理
[2]日大理工・教員・物理

次式の関係は角運動量 $l = 0$ としたときの運動方程式を連立させることによって得られる.

$$\frac{2E_{\rm cl}}{m} = \left(\frac{E_{\rm rel}}{mc}\right)^2 - c^2 \tag{8}$$

3　数値計算

3.1　4 次のルンゲ・クッタ法

数値計算を行った際に使用した方法は, 傾きを平均して次の点を計算していく 4 次のルンゲ・クッタ法である. これはテイラー展開の 4 次の項までを考慮し, 近似式としたものである. $t_1 = t_0 + h$ というようにして, ステップ幅 h を決めて計算していく. h の単位は [s] である.

3.2　精度

テイラー展開の 4 次の項の値を, ステップ幅 $h = 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}, 10^{-9}$[s] のそれぞれの場合で計算し, 0 次の項との比を調べ, 倍精度浮動小数点数型の最大精度である 15 桁と比較する. そして, 4 次の項と 0 次の項の比が 15 桁に近いステップ幅の大きさを起用する.

$$r(t_i + h) \simeq r_i + h\frac{dr}{dt} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{h^3}{6}\frac{d^3r}{dt^3} + \frac{h^4}{24}\frac{d^4r}{dt^4} \tag{9}$$

式 (9) の 4 次の項を使用する. また精度を調べる際は, 相対論効果を考慮すると近日点移動してしまって判断しにくいので, 同じ場所を楕円運動するはずの古典力学の運動方程式を使って調べていく. その結果を表 1 に示した.

Table 1: 4th-order term of the Taylor expansion of eq.(1),(2) at each step width h.

h [s]	式 (1) での 4 次の項 [cm]	式 (2) での 4 次の項 [rad]
10^{-4}	$-1.08998199173818 \times 10$	$2.98816041705680 \times 10^{-5}$
10^{-5}	$-1.08998199173818 \times 10^{-3}$	$2.98816041705681 \times 10^{-9}$
10^{-6}	$-1.08998199173818 \times 10^{-7}$	$2.98816041705680 \times 10^{-13}$
10^{-7}	$-1.08998199173818 \times 10^{-11}$	$2.98816041705680 \times 10^{-17}$
10^{-8}	$-1.08998199173818 \times 10^{-15}$	$2.98816041705681 \times 10^{-21}$
10^{-9}	$-1.08998199173818 \times 10^{-19}$	$2.98816041705681 \times 10^{-25}$

テイラー展開の 4 次の項と 0 次の項の比が 15 桁以下であると, 倍精度浮動小数点数型の最大精度 15 桁であるから意味のない加減算になってしまう. 従って, 表 1 より式 (1) における 0 次の項のオーダーは 10^7 桁であるので最適なステップ幅は $h = 10^{-6}$ もしくは $h = 10^{-7}$ であり, 式 (2) における 0 次の項のオーダーは 1 桁であるので最適なステップ幅は $h = 10^{-6}$ もしくは $h = 10^{-7}$ であることが分かった.

3.3　計算結果

ステップ幅を $h = 10^{-7}$[s] とし, $r_0 = 10^8$ [cm] の所から古典力学と相対論効果を考慮した場合で計算した結果を図 1 に示した. ここで, $L = 0.2$ とした. 図 1 の最も内側にある黒円がブラックホールの半径, 青線が古典力学における粒子の運動, 赤線が相対論効果を考慮した場合の粒子の運動を表している. 横軸縦軸は [cm] で表している.

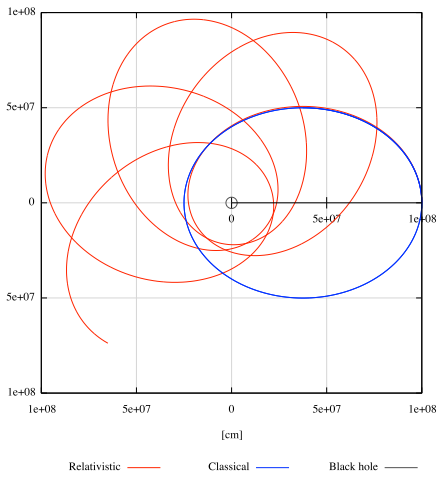

Figure 1: Particle motions considering classical (blue) and relativistic (red) mechanics. The black hole radius is also shown (black).

古典力学においては同じ場所を楕円運動しているが, そこに相対論効果をいれると楕円運動をしながらずれていくという結果になり, 定性的に理論の確認ができた. 今後は定量的に解析解と比較していく.

4　今後の予定

無限遠方から観測した場合において, 相対論効果のみを考慮した粒子の運動を計算した上で, 降着円盤におけるインフローの振る舞いも調べる. さらに両方の物理現象を仮定した場合でそこから発せられる X 線のスペクトルを計算していく.

5　参考文献

[1] Stuart L. Shapiro, Saul A. Teukolsky (1983) "Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars" WILEY-VCH
[2] 牧野淳一郎 (1999)『物理学演習 One Point 5 パソコン物理実地指導』共立出版 (株)