

H1-11

NURBS による 3 次元物体形状作成と運動解析  
Creation of 3D object shape by NURBS and the motion analysis

○齋藤 良平<sup>1</sup>, 野村 卓史<sup>2</sup>, 長谷部 寛<sup>2</sup>  
Ryohei Saito<sup>1</sup>, Takashi Nomura<sup>2</sup>, Hiroshi Hasebe<sup>2</sup>

Abstract: 3D objects are represented by NURBS function that is used in CAD. The volume, the center of gravity, moment of inertia of the object are calculated using the Gauss divergence theorem. Error of the calculated values are reasonable. The motion analysis of a twisted prism is carried out by the Newmark $\beta$  method.

1. はじめに

風災害や火山災害では瓦、木片などの飛翔物による被害がある。これらの物体形状は複雑で不規則である。これらの物体の挙動を解析するためには多様な物体形状の解析モデルが必要である。有限要素法は解析対象の形状作成の任意性においてきわめて優れた手法であるが、メッシュ生成に多くの労力がかかること、また CAD で作成された曲面形状を厳密に表現しきれないことが弱点として挙げられる。そこで CAD で用いられる NURBS (Non-Uniform Rational B-spline) を有限要素の基底関数に用いた IGA (Isogeometric Analysis) という解析手法が提案されている<sup>1)</sup>。

本研究では CAD ソフトから物体の形状データを抽出し、NURBS を用いて物体形状を作成し、運動解析に必要な諸量を算出<sup>2,3,4)</sup>、物体の運動解析を目的とする。

2. NURBS による曲面の表現

曲面の表現に用いる NURBS 基底関数は次式(1)のように、2つのパラメータ $\xi, \eta$ の関数として定義される。

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{ij}}{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m N_{k,p}(\xi)M_{l,q}(\eta)w_{kl}} \quad (1)$$

ここで  $w_{ij}$  は重み,  $N_{i,p}$ ,  $M_{j,q}$  は B-spline 基底関数,  $p, q$  は基底関数の次数,  $n, m$  は基底関数の数,  $i$  はノットベクトル  $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_{n+p+1}\}$  の成分の番号,  $j$  はノットベクトル  $\mathcal{H} = \{\eta_1, \dots, \eta_j, \dots, \eta_{m+q+1}\}$  の成分番号である。

B-spline 基底関数  $N_{i,p}$  は以下のように逐次的過程により定義される。B-spline 基底関数  $N_{i,p}$  は以下のように逐次的過程により定義される。

次数  $p=0$  のとき

$$N_{i,p}(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

次数  $p>0$  のとき

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1} \quad (3)$$

ノットベクトル  $\Xi$  はノット  $\xi_i$  の値が同じ、もしくは大きくなるように並べなければならない。NURBS 曲面は NURBS 基底関数とコントロールポイントの線形結合により式(4)のように表される。

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) \mathbf{B}_{ij} \quad (4)$$

$\mathbf{S} = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta))^T$  は NURBS 曲面,  $\mathbf{B}_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})^T$  はコントロールポイントである。これらの数値は CAD ソフト Rhinoceros から抽出した。

3. 体積, 重心, 慣性モーメントの算出

運動解析に必要な体積  $V$ , 重心  $(x_G, y_G, z_G)$ , 慣性モーメント  $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$  をガウスの発散定理 [式(5)]により算出する。

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} d\Omega = \iint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (5)$$

ここで  $\Omega$  は物体が占める領域,  $\Gamma$  は物体の表面,

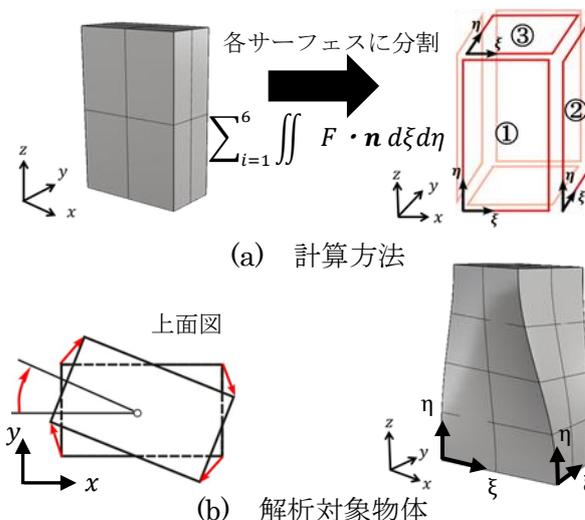


図 1 各諸量の計算方法と解析対象物体

1: 日本大学・院 (前)・土木 2: 日大理工・教員・土木

$\mathbf{n} = \langle n_x, n_y, n_z \rangle^T$  は表面  $\Gamma$  上の外向き単位法線ベクトルである。体積  $V$  の場合、被積分関数を以下のように与える。

$$F_x = \frac{1}{3}x, F_y = \frac{1}{3}y, F_z = \frac{1}{3}z \quad \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 1 \right) \quad (6)$$

その結果体積  $V$  は次の表面積分で表される。

$$V = \int_{\eta_0}^{\eta_L} \int_{\xi_0}^{\xi_L} \left\{ \frac{1}{3}x(\xi, \eta)n_x + \frac{1}{3}y(\xi, \eta)n_y + \frac{1}{3}z(\xi, \eta)n_z \right\} d\xi d\eta \quad (7)$$

ここで方向余弦  $n_x, n_y, n_z$  は次式で表される。

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} & n_y &= \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ n_z &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (8)$$

重心を求めるために 1 次モーメントを算出する。  $z$  軸面からの距離  $y$  を積分する 1 次モーメント  $G_{zx}$  は次のように表される。

$$G_{zx} = \iiint_{\Omega} y \, dx dy dz \quad (9)$$

被積分関数は次のように与えた。

$$F_y = \frac{1}{2}y^2 \quad \left( \frac{\partial F_y}{\partial y} = y \right) \quad (10)$$

その結果 1 次モーメントは次の表面積分で表される。

$$G_{zx} = \int_{\eta_0}^{\eta_L} \int_{\xi_0}^{\xi_L} \left\{ \frac{1}{2}y^2(\xi, \eta)n_y \right\} d\xi d\eta \quad (11)$$

$z$  軸まわりの慣性モーメント  $I_{zz}$  は次のように表される。

$$I_{zz} = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz \quad (12)$$

被積分関数を次のように与えた。

$$F_x = \frac{1}{3}x^3, F_y = \frac{1}{3}y^3 \quad \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = x^2 + y^2 \right) \quad (13)$$

その結果慣性モーメント  $I_{zz}$  は次の表面積分で表される。

$$I_{zz} = \int_{\eta_0}^{\eta_L} \int_{\xi_0}^{\xi_L} \left\{ \frac{1}{3}x^3(\xi, \eta)n_x + \frac{1}{3}y^3(\xi, \eta)n_y \right\} d\xi d\eta \quad (14)$$

式(7),(11),(14)には、NURBS 曲面の導関数  $\partial s/\partial \xi, \partial s/\partial \eta$  が必要である。図 1 に角柱を 30 度ねじった物体を示す。台形側を適用し、数値積分した結果を表 1 に示す。表面積分は図 1 (a) の 6 つの面ごとに行い、各サーフェスごとの計算結果の合計を求めた。

#### 4. 運動解析

Newmark $\beta$ 法を用いて、角柱を  $z$  軸周りに 30 度ねじった剛体の運動解析を行った。

表 1 体積、重心、慣性モーメントの計算結果

	計算値	理論値	誤差 (%)
$V$	6072.4	6000	1.2
$x_G(G_{yz}/V)$	9.92	10	-0.84
$y_G(G_{zx}/V)$	4.96	5	-0.84
$z_G(G_{xy}/V)$	15.09	15	0.61
$I_{xx}$	521958	521058	1.49
$I_{yy}$	631936	635652	-0.58
$I_{zz}$	252923	249942	1.19

並進運動は以下のように表される。

$$m\mathbf{a}_x = f_x, m\mathbf{a}_y = f_y, m\mathbf{a}_z = f_z \quad (15)$$

ここで  $m$  は剛体の質量、 $\mathbf{a}$  は剛体の加速度のベクトル、 $f$  は剛体の重心に作用する力のベクトルである。

回転運動は以下のように表される。

$$I_\xi \dot{\omega}_\xi = T_\xi + (I_\eta - I_\zeta) \omega_\eta \omega_\zeta \quad (16)$$

$$I_\eta \dot{\omega}_\eta = T_\eta + (I_\zeta - I_\xi) \omega_\zeta \omega_\xi \quad (17)$$

$$I_\zeta \dot{\omega}_\zeta = T_\zeta + (I_\xi - I_\eta) \omega_\xi \omega_\eta \quad (18)$$

ここで  $I_\xi, I_\eta, I_\zeta$  は主軸まわりの慣性モーメント、 $\dot{\omega}_\xi, \dot{\omega}_\eta, \dot{\omega}_\zeta$  は主軸まわりの角加速度、 $T_\xi, T_\eta, T_\zeta$  は主軸まわりのトルクである。図 2 は運動解析のモデルを図示したものである。

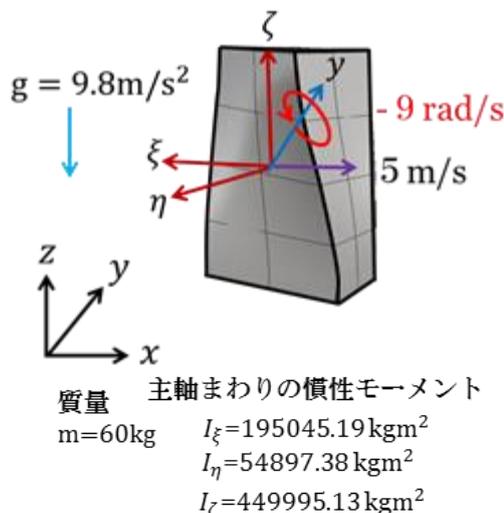


図 2 3次元物体の運動解析モデル

#### 5. まとめ

NURBS を用いて作成した物体形状に対し、ガウスの発散定理を用いて 3 次元物体の体積、重心、慣性モーメントを算出した。物体形状の例として 30 度ねじった角柱を作成した。体積、重心、慣性モーメントの計算は誤差が大きいため今後改善する必要がある。3 次元物体の運動解析を行い妥当な結果を得た。

#### 6. 参考文献

- 1) J. A. Cottrell, T. J.R. Hughes, Y. Bazilevs : Isogeometric Analysis Toward Integration of CAD and FEA, WILEY, 2009.
- 2) 齋藤良平,野村卓史,長谷部寛 : NURBS による物体形状作成と運動解析,平成 27 年度土木学会全国大会第 70 回年次学術講演会,CS8-008,2015.
- 3) 齋藤良平,野村卓史,長谷部寛 : NURBS による物体形状作成の試み,平成 27 年度土木学会第 43 回関東支部技術研究発表会,I-55,2016.
- 4) 齋藤良平,野村卓史,長谷部寛 : NURBS による 3 次元物体形状作成の試み,平成 28 年度土木学会全国大会第 71 回年次学術講演会,CS8-007,2016