O-1

クーロンポテンシャル中の荷電粒子に対するランダウ・リフシッツ方程式の解

A solution of the Landau-Lifshitz equation for a charged particle in the Coulomb potential

○川俣慶樹 [1]，　藤原侑樹 [2]，　出口真一 [3]
*Yoshiki Kawamata[1], Yuki Fujiwara[2], Shinichi Deguchi[3]

Abstract : We derive a solution of the Landau-Lifshitz equation for a radiating charged particle in the Coulomb potential.

1．導入

加速度運動する荷電粒子は，自身が放射する電磁波により，反作用を受けることが知られている．この輻射反作用は，ローレンツとアブラハムによって 100 年以上前に論じられ，現在でも様々な視点から研究されている．

輻射の反作用取り入れた荷電粒子の運動方程式は

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} + \beta \frac{d}{dt}\ddot{\boldsymbol{x}}, \quad \beta := \frac{\gamma}{m} \tag{1}$$

である．ここで，$\boldsymbol{x}$ は粒子の位置ベクトル，$\ddot{\boldsymbol{x}}$ は粒子の加速度，m は粒子の質量，$\boldsymbol{F}$ は外部ローレンツ力である．式 (1) はアブラハム・ローレンツ (AL) 方程式と呼ばれている．この方程式は，$\boldsymbol{x}$ の時間に関する 3 階微分を含むため，現実的な運動を表す解に加え，暴走解などの現実にはありえない運動を表す解をもつ．

本研究では，外部ローレンツ力 $\boldsymbol{F}$ としてクーロン力を考え，輻射反作用を受ける荷電粒子の運動を調べる．ただし，AL 方程式 (1) を直接扱うには幾つかの困難があるため，以下では式 (1) を近似したランダウ・リフシッツ (LL) 方程式に基づいて，荷電粒子の運動を考察する．

2．ランダウ・リフシッツ方程式

ランダウとリフシッツは AL 方程式を近似し，扱いが容易な 2 階の微分方程式を次のように導いている．

まず，式 (1) の右辺第 2 項に式 (1) 自体を代入すると

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} + \beta \frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{F}}{m} + \beta \frac{d}{dt}\ddot{\boldsymbol{x}}\right) \tag{2}$$

が得られる．ここで，定数 β は十分小さいから $\beta^2 \simeq 0$ であると近似すれば，式 (2) は

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} + \beta \frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{F}}{m}\right) \tag{3}$$

となる．式 (3) は（非相対論的な）ランダウ・リフシッツ (LL) 方程式と呼ばれている．この方程式は 2 階の微分方程式であり，AL 方程式で問題となる暴走解を持たない．

いま，クーロンポテンシャル中にある荷電粒子を考える．力が引力である場合，外部ローレンツ力はクーロン力 $\boldsymbol{F} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{x}}{r^3}$ $(r := |\boldsymbol{x}|)$ であり，式 (3) は

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = -\mu\frac{\boldsymbol{x}}{r^3} - \beta\frac{d}{dt}\left(\mu\frac{\boldsymbol{x}}{r^3}\right), \quad \mu := \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m} \tag{4}$$

となる．この式の両辺と $\boldsymbol{x}$ の外積をとると，角運動量 $\boldsymbol{L} := \boldsymbol{x} \times m\dot{\boldsymbol{x}}$ の時間変化が次のように得られる．

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = -\frac{\beta\mu}{r^3}\boldsymbol{L}. \tag{5}$$

角運動量は β の項があるために保存しない．しかし，その時間変化は $\boldsymbol{L}$ に比例するため，粒子の運動は平面内で行われる．従って，この系の運動は 2 次元の座標系で記述することができる．

3．レビ・チビタ変換

特に $\beta = 0$ のとき，式 (4) は 2 次元ケプラー運動の運動方程式と同型になる．天体力学において，2 次元ケプラー運動の運動方程式にレビ・チビタ変換を施すと，扱いが容易な 2 次元調和振動子の運動方程式になることが知られている．以下では，その内容を説明をする．

次のような 2 次元ケプラー運動の運動方程式を考える．

$$\ddot{\boldsymbol{x}} + \frac{\nu}{r^3}\boldsymbol{x} = 0, \quad \nu := GM. \tag{6}$$

ここで，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ は粒子の位置ベクトル，G は重力パラメータ，M は中心体の質量である．複素座標 $x := x_1 + ix_2$ を用いると，運動方程式は

$$\ddot{x} + \frac{\nu}{r^3}x = 0, \quad r = |x| \tag{7}$$

と書ける．また，式 (7) からエネルギー積分が

$$\frac{1}{2}|\dot{x}|^2 - \frac{\nu}{r} = -h, \quad h > 0 \tag{8}$$

と求まる．ここで実時間 t から

$$d\tau := \frac{b}{r}dt, \quad (b \text{ は } \tau \text{ の実関数}) \tag{9}$$

で定義からされる仮想時間 τ を用いると，式 (7) と式 (8) は

$$b^2\left\{rx'' + \left(\frac{b'}{b}r - r'\right)x'\right\} + \nu x = 0, \tag{10a}$$

$$\frac{1}{2}b^2 r^{-2}|x'|^2 - \frac{\nu}{r} = -h \tag{10b}$$

と書ける．ただし，$'$ は τ 微分を表す．さらに，$u^2 := x$ で定められる新たな複素座標 u を用いると，式 (10) は

$$2ru'' + 2\frac{b'}{b}ru' + \left(\frac{\nu}{b^2} - 2|u'|^2\right)u = 0, \tag{11a}$$

$$2b^2|u'|^2 - \nu = -rh \tag{11b}$$

[1] 日大理工・院 (前)・量子　[2] 日大理工・院 (後)・量子　[3] 日大・量科研

と表せる．次に，式 (11b) を式 (11a) に代入し，$b=\sqrt{2h}$ と選べば, 式 (11) は

$$u''+\frac{1}{4}u=0 \tag{12}$$

となり，２次元調和振動子の方程式に帰着する．

式 (12) に対して適切な初期条件を置くと，解は

$$u=\sqrt{a(1+e_c)}\cos\left(\frac{\tau}{2}\right)+i\sqrt{a(1-e_c)}\sin\left(\frac{\tau}{2}\right) \tag{13}$$

と求まる．ここで，a, e_c は定数である．これより，粒子の複素座標 x は

$$x=a(e_c+\cos\tau)+ia\sqrt{1-e_c^2}\sin\tau \tag{14}$$

のように得られる．定数 a は半長軸を，e_c は離心率を，τ は離心近点角を表し，ケプラー運動を再現する．

４．ランダウ・リフシッツ方程式のレビ・チビタ変換

第３章で述べたように，輻射反作用を受けるクーロンポテンシャル中の粒子は平面内で運動する．そこで，粒子の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$ として，改めて式 (4) を

$$\ddot{\boldsymbol{x}}+\mu\frac{\boldsymbol{x}}{r^3}+\beta\frac{d}{dt}\left(\mu\frac{\boldsymbol{x}}{r^3}\right)=0 \tag{15}$$

と書く．これを，輻射反作用を考慮した２次元ケプラー運動の運動方程式とみて，レビ・チビタ変換を行う．複素座標 $x:=x_1+x_2$ を用いると，式 (15) は

$$\ddot{x}+\mu\frac{x}{r^3}+\beta\frac{d}{dt}\left(\mu\frac{x}{r^3}\right)=0 \tag{16}$$

と書ける．さらに，式 (16) は仮想時間 τ を使って，

$$b^2r^3x''+br\{r(b'r-br')+\beta\mu\}x'+\mu(r^2-3\beta br')x=0 \tag{17}$$

と表せる．式 (17) は，新たな複素座標 u を用いると

$$\begin{aligned}&2r^3u''+\left(2\frac{b'}{b}r^3-\frac{\beta\mu}{b}r\right)u'\\&\quad+\left(\frac{\mu}{b^2}-2|u'|^2\right)r^2u-3\frac{\beta\mu}{b}u^2\bar{u}'=0\end{aligned} \tag{18}$$

と書ける．ここで

$$u=g(\tau)e^{i\rho(\tau)}\quad(g,\rho\text{ は }\tau\text{ の実関数}) \tag{19}$$

と置き，これを式 (18) に代入した後に，次式のように実部と虚部に分解する．

$$\begin{aligned}\rho'^2&=\frac{1}{2}g^{-1}g''+\frac{1}{2}b^{-1}b'g^{-1}g'-\beta\mu b^{-1}g^{-5}g'\\&\quad+\frac{\mu}{4}b^{-2}g^{-2}-\frac{1}{2}g^{-2}g'^2,\end{aligned} \tag{20}$$

$$2g^6g'\rho'^2+\frac{g^7}{2}\frac{d}{d\tau}\rho'^2+b^{-1}b'g^7\rho'^2+\beta\mu b^{-1}g^3\rho'^2=0. \tag{21}$$

式 (20) を式 (21) に代入し，ρ'^2 を消去すれば

$$\begin{aligned}&g'''g^5+g'g''g^4-2g'^3g^3+\left(\frac{b''}{b}+\frac{b'^2}{b^2}\right)g'g^5+\frac{3b'}{b}g''g^5\\&+\frac{b'}{b}g'^2g^4+\frac{\mu}{b^2}g'g^3+\frac{\beta\mu^2}{b^3}-4\left(\frac{\beta\mu}{b}\right)^2g'g^{-3}=0\end{aligned} \tag{22}$$

が得られる．いま

$$g(\tau)=\tilde{g}e^{\lambda\beta\tau},\quad b(\tau)=e^{-\lambda\beta\tau} \tag{23}$$

と置く．ここで，$\tilde{g}$ は正の定数，λ は実定数である．式 (23) を式 (22) に代入し，$\beta^2\simeq 0$ と近似すれば λ は $\lambda=-\frac{\mu}{\tilde{g}^4}$ と定まり，負の値になることがわかる．

次に，式 (23) を式 (20) に代入し，$\beta^2\simeq 0$ と近似すれば $\rho'=\frac{\sqrt{\mu}}{2\tilde{g}}$ が得られる．この式の両辺を τ で積分すれば

$$\rho=\omega\tau+\rho_0,\quad \omega:=\frac{\sqrt{\mu}}{2\tilde{g}} \tag{24}$$

が得られる．ここで，ρ_0 は定数である．式 (24) を式 (19) に代入し，ω の定義から $\tilde{g}=\frac{\sqrt{\mu}}{2\omega}$ となることを用いると，u は $u=\frac{\sqrt{\mu}}{2\omega}e^{\lambda\beta\tau}e^{i(\omega\tau+\rho_0)}$ $\left(\lambda=-\frac{16\omega^4}{\mu}\right)$ と定まる．従って，x は次のように導かれる．

$$x=\frac{\mu}{4\omega^2}e^{2\lambda\beta\tau}e^{2i(\omega\tau+\rho_0)}. \tag{25}$$

これより，τ の増加に伴い x は減衰振動することがわかる．

式 (25) で書かれる座標は仮想時間 τ の関数であるため，これを実時間 t の関数にする．式 (9)，式 (19)，式 (23) より $dt=\tilde{g}^2e^{-3\lambda\beta\tau}d\tau$ となるから，これの両辺を積分すれば $t=\tilde{g}^2\frac{e^{3\lambda\beta\tau}}{3\lambda\beta}+t_0$ が得られる．ここで，積分定数 t_0 を適切な値 $t_0=-\frac{\tilde{g}^2}{3\lambda\beta}$ に選ぶと，t は

$$t=\frac{\tilde{g}^2}{3\lambda\beta}(e^{3\lambda\beta\tau}-1) \tag{26}$$

と定まる．これより，τ が増加すると t も増加することがわかる．式 (26) を τ について解いた式

$$\tau=\frac{1}{3\lambda\beta}\log\left(\frac{3\lambda\beta}{\tilde{g}^2}t+1\right) \tag{27}$$

を式 (25) に代入し，$\rho_0=0$ に選べば，実時間 t に関する表式

$$x=\frac{\mu}{4\omega^2}\left(-\frac{192\omega^6\beta}{\mu^2}t+1\right)^{\frac{2}{3}-\frac{i\mu}{24\omega^3\beta}} \tag{28}$$

が得られる．

５．まとめと今後の課題

本研究では，クーロンポテンシャル中にある粒子の LL 方程式のレビ・チビタ変換を行った．それに際して，LL 方程式の導入でも用いられた $\beta^2\simeq 0$ を適宜用いた．その結果，解として複素座標 x の実時間 t に対する減衰振動解 (28) を見出した．より一般的な，減衰する楕円運動を表す解を導出することが今後の課題である．

参考文献

[1] S. G. Rajeev, Ann. Phys. **323**, 2654-2661 (2008).

[2] L. Landau, E. M. Lifshitz, 場の古典論 (東京図書, 1964).

[3] J. Waldvogel, in Proceedings of the conference “From Order to Disorder in Gravitational N-Body Dynamical Systems” (Springer, 2006), 231-251.