O-14

相対論的アウトフローの数値シミュレーション

Numerical Simulations for Relativistic Outflows in Astrophysics

○岡田勝志[1]，岩本弘一[2]
*Masashi Okada[1], Koichi Iwamoto[2]

Abstract: High-velocity outflows accompany energetic astrophysical phenomena such as winds from accretion disks, pulsar winds, supernova ejecta, and gamma-ray burst jets. The outflows interact with the surrounding interstellar matter, resulting in strong X-ray emissions and the acceleration of cosmic rays. We develop a one-dimensional special relativistic hydrodynamics code to simulate the high-velocity outflows. We adopt an HLLC method for solving an approximate Riemann problem and derive an explicit formula to calculate the numerical flux. We demonstrate the several test calculations with the code, including the Riemann shock tube problem.

１．はじめに

宇宙における高エネルギー現象の多くは，高速のアウトフローを伴う．コンパクト天体の周りの降着円盤からのアウトフロー，パルサー風，超新星爆発の放出物質，ガンマ線バーストのジェットなどがその例である[1]．このようなアウトフローは周囲の星間ガスと衝突し, 高温プラズマを生成して強い X 線を放射したり, 衝撃波面において宇宙線を加速したりすると考えられている．このようなアウトフローと星間ガスの相互作用を定量的に調べるためには，数値シミュレーションが重要である[2]．本研究では，HLLC 近似リーマン解法を用いた相対論的流体力学の数値計算コードを作成する．そして，作成したコードを使ってリーマンの衝撃波管テスト問題，コンパクト天体から噴出するプラズマのアウトフローなどの数値シミュレーションを行う．

２．相対論的流体力学の方程式

1 次元の相対論的流体力学の方程式は，密度（エネルギー密度をc^2で割ったもの，c は光速），速度，圧力，（単位質量あたりの）エンタルピーを，それぞれ ρ, v, p, h，ローレンツ因子を γ とするとき

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} D \\ m \\ E \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}) = \begin{pmatrix} Dv \\ mv + p \\ m \end{pmatrix}$$

$$D = \gamma\rho, \quad m = Dh\gamma v, \quad E = Dh\gamma - p$$

とおくことで,

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

のように保存形式で表される. 各成分は, 質量保存, 運動量保存，エネルギー保存を表している．

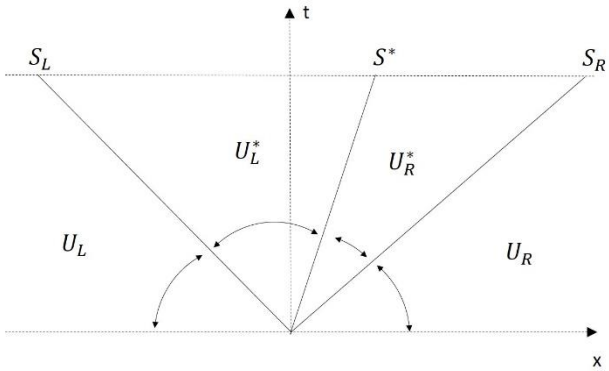

Figure 1. Riemann fan in HLLC method

比熱比が Γ の理想流体の場合，状態方程式より

$$\rho h = \rho + \frac{\Gamma\rho}{\Gamma - 1}$$

となる．また，$\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ である．

(1)式を差分方程式

$$\boldsymbol{U}_j^{n+1} = \boldsymbol{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_j}\left(\boldsymbol{F}_{j+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{F}_{j-\frac{1}{2}}\right) \quad (2)$$

に直し，数値的に解く．上付き添字は時刻のステップ，下付き添字は空間メッシュの番号である．

３．HLLC 法による近似リーマン解

差分式(2)の数値流速 $\boldsymbol{F}_{j+\frac{1}{2}}$ は，保存変数 $\boldsymbol{U}(x,t)$ の初期値

$$\boldsymbol{U}(x,0) = \begin{cases} \boldsymbol{U}_L & \left(x < x_{j+\frac{1}{2}}\right) \\ \boldsymbol{U}_R & \left(x > x_{j+\frac{1}{2}}\right) \end{cases}$$

に対するリーマン問題の解 $\boldsymbol{U}(x,t)$ から構成する．HLLC 法は，Harten らによって考案された HLL 法[3]

１：日大理工・院（前）・物理　２：日大理工・教員・物理

を，接触不連続をより良く分解できるように改良した方法である[4]. HLLC 法では，Figure 1 のようにリーマンファンを 3 つの特性線で分けられた 4 つの一様な状態によって近似し，セル境界上で保存変数を

$$\boldsymbol{U}\left(x_{j+\frac{1}{2}},t\right)=\begin{cases}\boldsymbol{U}_L & (S_L>0)\\ \boldsymbol{U}_L^* & (S_L\le 0\le S^*)\\ \boldsymbol{U}_R^* & (S^*\le 0\le S_R)\\ \boldsymbol{U}_R & (S_R\le 0)\end{cases}$$

とし，数値流速を

$$\boldsymbol{F}_{j+\frac{1}{2}}=\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{U}\left(x_{j+\frac{1}{2}},t\right)\right)$$

とする. ここで, S_L, S_R, S^* は各特性波の速度である.

４．１次元相対論的流体力学の HLLC 流速

今回は Mignone & Bodo (2005) [5]にしたがい，1 次元の相対論的流体力学の場合に，HLLC 法の中間状態 $\boldsymbol{U}_L^*,\boldsymbol{U}_R^*$ を与える表式を導出する.

特性線を横切る領域で保存則を適用して得られる Rankine-Hugoniot ジャンプ条件

$$S_L(\boldsymbol{U}_L^*-\boldsymbol{U}_L)=\boldsymbol{F}_L^*-\boldsymbol{F}_L$$
$$S_R(\boldsymbol{U}_R-\boldsymbol{U}_R^*)=\boldsymbol{F}_R-\boldsymbol{F}_R^*$$

から 6 つの条件式が得られる．さらに，$\boldsymbol{F}_L^*=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_L^*),\boldsymbol{F}_R^*=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_R^*)$ および接触不連続面で圧力と速度が連続，ならびに$S^*=v^*$であるという条件を課せば

$$D_L^*,D_R^*,m_L^*,m_{R,}^*p^*,v^*$$

の 6 つの独立な未知数を決定することができる.

まず，ジャンプ条件の第 2, 第 3 成分から

$$p^*=F_{2,\mathrm{HLL}}-m_{\mathrm{HLL}}v^* \quad (3)$$
$$p^*v^*=m_{\mathrm{HLL}}+E_{\mathrm{HLL}}v^* \quad (4)$$

の関係が得られる．ここで，$m_{\mathrm{HLL}},E_{\mathrm{HLL}},F_{2,\mathrm{HLL}}$はそれぞれ，HLL 法の場合の中間状態の m,E および流速の第 2 成分であり，$D_L^*=D_R^*,m_L^*=m_R^*$ の場合の条件式を解くことで，以下のように求められる.

$$m_{\mathrm{HLL}}=\frac{(S_L-v_L)m_L-(S_R-v_R)m_R-(p_L-p_R)}{S_L-S_R}$$

$$E_{\mathrm{HLL}}=\frac{(S_L-v_L)E_L-(S_R-v_R)E_R-(p_Lv_L-p_Rv_R)}{S_L-S_R}$$

$$F_{2,\mathrm{HLL}}=\frac{S_R(m_Lv_L-m_LS_L+p_L)-S_L(m_Rv_R-m_RS_R+p_R)}{S_R-S_L}$$

(3)式と(4)式から，p^*またはv^*についての 2 次方程式が得られる．たとえば，v^*は

$$m_{\mathrm{HLL}}(v^*)^2-\left(E_{\mathrm{HLL}}+F_{2,\mathrm{HLL}}\right)v^*+m_{\mathrm{HLL}}=0$$

の解のうち，$-1<v^*<1$ を満たすもので，ただ 1 つに決まる．v^*とp^*が決まれば，ジャンプ条件の第 1 式

$$(S_L-v^*)D_L^*=D_L(S_L-v_L)$$
$$(S_R-v^*)D_R^*=D_R(S_R-v_R)$$

からD_L^*,D_R^* が求まる．また，ジャンプ条件の第 2 式

$$(S_L-v_L)m_L-(S_L-v^*)m_L^*=p_L-p^*$$
$$(S_R-v_R)m_R-(S_R-v^*)m_R^*=p_R-p^*$$

から，m_L^*,m_R^*が求まる．以上より，流速$\boldsymbol{F}_L^*,\boldsymbol{F}_R^*$が求まり，HLLC 流速は

$$\boldsymbol{F}_{j+\frac{1}{2}}=\begin{cases}\boldsymbol{F}_L & (S_L>0)\\ \boldsymbol{F}_L^* & (S_L\le 0\le S^*)\\ \boldsymbol{F}_R^* & (S^*\le 0\le S_R)\\ \boldsymbol{F}_R & (S_R\le 0)\end{cases}$$

と与えられる.

作成したコードを使って，衝撃波管問題を解いた結果を Figure 2 に示す．時間，空間ともに 1 次精度で計算した．左側，右側の密度，圧力の初期値をそれぞれ$(\rho_L,p_L)=(1.0,1.0)$，$(\rho_R,p_R)=(0.1,0.05)$とし，速度 v はともに 0 とした．$t=0.8$における密度分布を示している．メッシュ数は 400 で CFL 数は$\Delta t/\Delta x=0.4$としている.

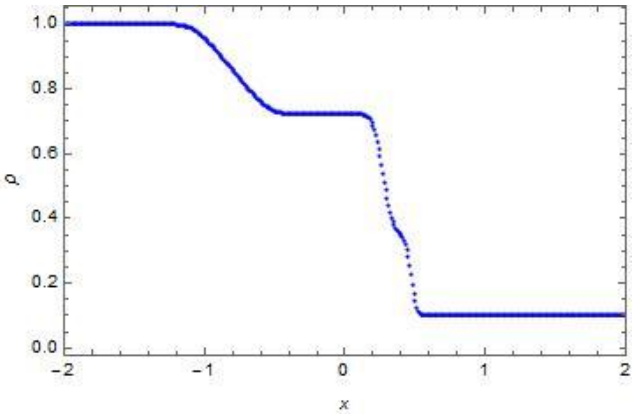

Figure 2. Density profile in shock tube test problem

５．今後の展望

作成した相対論的流体力学コードを応用し，ガンマ線バーストのジェット，超新星爆発の衝撃波などの伝播について調べていきたい.

６．参考文献

[1] 小山　勝二, 嶺重　慎編「ブラックホールと高エネルギー現象」(シリーズ現代の天文学 8)，日本評論社

[2] 富阪　幸治，花輪　知幸，牧野　淳一郎編「シミュレーション天文学」(シリーズ現代の天文学 14)，日本評論社

[3] Harten A., Lax P.D., van Leer B., SIAM Rev., 25, 35(61)

[4]Toro E.F., 1997, Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Springer, Berlin

[5] Mignone A., Bodo G., 2005, An HLLC Riemann solver for Relativistic flows -I. Hydrodynamics, MNRAS 364, 126