

負の宇宙定数を持つ 3 次元時空における漸近対称性と 2 次元共形対称性

Asymptotic symmetry for three dimensional spacetime with negative cosmological constant and two dimensional conformal symmetry

○濱田直毅¹, 三輪光嗣²*Naoki Hamada¹, Akitsugu Miwa²

We review asymptotic symmetries of three dimensional geometry with a negative cosmological constant based on the analysis by J.D.Brown and M. Henneaux. Boundary conditions for the geometry is taken to be an asymptotically anti de Sitter, and then the asymptotic symmetry is enhanced to include the infinite dimensional conformal algebra.

1. 導入

d+1 次元反ドジッター (Anti-de Sitter) 時空における重力理論と反ドジッター時空の境界に導入される d 次元の共形場理論 (Conformal Field Theory) についての対応を $\text{AdS}_{d+1}\text{-CFT}_d$ 対応と呼ぶ. この対応を用いると重力理論を用いて共形場理論の物理量を計算することや逆に共形場理論の解析を通じて重力理論の性質を理解することが可能となるため、大変便利な対応関係である.

$\text{AdS}_{d+1}\text{-CFT}_d$ 対応において最も基本的な対応関係の一つとして、両者の対称性の一致が挙げられる. ここでは時間 1 次元, 空間 2 次元の 2+1 次元時空における重力理論に着目し, 無限遠方で漸近的に AdS_3 に近づく時空を考える. この時空の持つ漸近対称性, つまり無限遠における境界条件が満たす対称性と, 境界に導入される 2 次元共形場理論の持つ無限次元の対称性の対応を論文 [1] に沿って紹介する. (文献 [2] も参考にした.)

2. 2+1 次元重力理論の解

2+1 次元ではゲージの自由度を除いた計量の持つ自由度は 0 であり, 物質を含まないアインシュタイン方程式の解は局所的には宇宙定数 Λ によって一意に決まってしまう. 宇宙定数が負の場合の解は局所的には 2+1 次元の AdS 時空となり, 計量は以下のように書くことができる.

$$ds^2 = -\left(\frac{r'^2}{\ell^2} + 1\right) dt'^2 + \left(\frac{r'^2}{\ell^2} + 1\right)^{-1} dr'^2 + r'^2 d\phi'^2 \quad (1)$$

ここで ℓ は宇宙定数 $\Lambda (< 0)$ を使って $\ell = (-1/\Lambda)^{1/2}$ と与えられる. 座標の領域を $-\infty < t' < \infty$, $0 \leq r' < \infty$, $0 \leq \phi' < 2\pi$ とすると時空は大域的に AdS 時空となる. 一方で, 座標に対して以下のような同一視を行う

と大域的には AdS 時空とは異なる解が得られる.

$$(t', r', \phi') \simeq (t' - 2\pi A, r', \phi' + 2\pi\alpha) \quad (2)$$

時間方向と角度方向に対して同時に同一視が入るため少しわかりづらいが, 以下のような座標変換によって新しい座標 (t, r, ϕ) を導入することでこの点を解消することができる.

$$t = t' + \frac{A}{\alpha}\phi', \quad r = r', \quad \phi = \frac{1}{\alpha}\phi'$$

ここで t' - ϕ' 平面において式 (2) による同一視の方向と直行する方向に t 軸をとり, ϕ は周期が 2π となるように定義されている.

新しい座標を用いると計量は以下ようになる.

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{\ell^2} + 1\right)(dt - A d\phi)^2 + \left(\frac{r^2}{\ell^2} + 1\right)^{-1} dr^2 + r^2 \alpha^2 d\phi^2 \quad (3)$$

また $\alpha = 1$ かつ $A = 0$ では, 最初に書かれた計量の式 (1) になることから大域的な AdS 時空を表している. α と A がこの値からずれると解が大域的な AdS 時空とは異なる. このことは以下のエネルギー E と角運動量 J の表式からも理解できる.

$$E = 4\pi(1 - \alpha), \quad J = 4\pi\alpha A$$

ただし, 大域的な AdS 時空において $E = J = 0$ となるように定数を調節した.

3. 漸近対称性と 2 次元共形対称性

次に今考えている時空の漸近的な対称性を調べる. 式 (3) は無限遠で漸近的に AdS 時空に近づく時空を表すが, この表式ではその点が分かりにくい. 論文 [1] ではこうした漸近的な構造を見やすくするために, 以下の座標変換を行っている.

$$t \rightarrow \frac{t}{\alpha} \left(\alpha^2 - \frac{A^2}{\ell^2} \right), \quad r \rightarrow r \left(\alpha^2 - \frac{A^2}{\ell^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \phi \rightarrow \phi - \frac{A}{\alpha \ell^2} t$$

¹ 日大理工・院 (前)・物理² 日大理工・教員・物理

この座標変換の下で計量は次のように書き直される。

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{\ell^2} + \alpha^2\right)dt^2 + \left(\frac{r^2 - A^2}{\ell^2} + \alpha^2\right)^{-1}dr^2 + (r^2 - A^2)d\phi^2 + 2\alpha Adtd\phi$$

この形では、 $r \rightarrow \infty$ の極限で $dtd\phi$ の項以外は主要部が AdS 時空に近づくことがわかる。そこで、漸近的 AdS という概念を $dtd\phi$ 成分に $\mathcal{O}(r^0)$ の項を許す形で以下の境界条件によって定義する。

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\frac{r^2}{\ell^2} + \mathcal{O}(1), & g_{tr} &= \mathcal{O}(r^{-3}) \\ g_{t\phi} &= \mathcal{O}(1), & g_{rr} &= \frac{\ell^2}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-4}) \\ g_{r\phi} &= \mathcal{O}(r^{-3}), & g_{\phi\phi} &= r^2 + \mathcal{O}(1) \end{aligned} \quad (4)$$

この境界条件を保つ座標変換は計量のリー微分を調べることで見つけることができる。座標変換を $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$ とし、境界条件 (4) を保つ変換を次の形に書く。

$$\begin{aligned} \xi^t &= \ell T(t, \phi) + \frac{\ell^3}{r^2} \bar{T}(t, \phi) + \mathcal{O}(r^{-4}) \\ \xi^r &= rR(t, \phi) + \mathcal{O}(r^{-1}) \\ \xi^\phi &= \Phi(t, \phi) + \frac{\ell^2}{r^2} \bar{\Phi}(t, \phi) + \mathcal{O}(r^{-4}) \end{aligned}$$

リー微分の計算から $T(t, \phi)$ などの関数が以下の関係式を満たす必要があることが分かる。

$$\ell \partial_t T(t, \phi) = \partial_\phi \Phi(t, \phi) = -R(t, \phi) \quad (5)$$

$$\ell \partial_t \Phi(t, \phi) = \partial_\phi T(t, \phi) \quad (6)$$

$$\bar{T}(t, \phi) = -\frac{\ell}{2} \partial_t R(t, \phi)$$

$$\bar{\Phi}(t, \phi) = \frac{1}{2} \partial_\phi R(t, \phi)$$

例として $g_{\phi\phi}$ のリー微分 $L_\xi g_{\phi\phi}$ を見てみる。

$$\begin{aligned} L_\xi g_{\phi\phi} &= \xi^\rho \partial_\rho g_{\phi\phi} + 2\partial_\phi \xi^\rho g_{\rho\phi} \\ &= \xi^t \mathcal{O}(1) + \xi^r (2r + \mathcal{O}(r^{-3})) + \xi^\phi \mathcal{O}(1) \\ &\quad + 2[\partial_\phi \xi^t \mathcal{O}(1) + \partial_\phi \xi^r \mathcal{O}(r^{-3}) + \partial_\phi \xi^\phi (r^2 + \mathcal{O}(1))] \end{aligned}$$

境界条件が保たれるためには右辺が $\mathcal{O}(1)$ である必要がある。 ξ^r の項と $\partial_\phi \xi^\phi$ の項は以下のように r の 2 次を含むため、これらはキャンセルする必要がある。

$$\xi^r (2r) + \partial_\phi \xi^\phi (r^2) = r^2 (R(t, \phi) + \partial_\phi \Phi(t, \phi)) + \mathcal{O}(1)$$

このようにして式 (5) の二つ目の等号が導かれる。

論文 [1] では $T(t, \phi)$ などをフーリエ級数展開して各モードに対応する変換の交換関係が求められている。ここではこの変換が AdS 時空の境界にどのように作用するかについて少し詳しく説明する。そのためにまず

座標変換 $r = 1/u$ を行う。新しい座標では空間の境界は $u = 0$ に存在する。また境界近傍での計量は

$$ds^2 = \frac{1}{u^2} \left(\ell^2 du^2 - \frac{dt^2}{\ell^2} + d\phi^2 \right)$$

によって与えられ、境界に沿った 2 次元方向は (t, ϕ) を座標とし、計量が $ds^2 \propto -(dt/\ell)^2 + d\phi^2$ で与えられる平坦なシリンダーとなっている。 u に対する座標変換 $u \rightarrow u + \xi^u$ は

$$\xi^u = -uR(t, \phi) + \mathcal{O}(u^3)$$

のように与えられる。このため、境界 $u = 0$ では $\xi^u = 0$ となり、座標変換は境界に沿った方向に、あるいは境界上に作用する変換と見なすことができる。また、このとき

$$\xi^t \Big|_{u=0} = \ell T(t, \phi), \quad \xi^\phi \Big|_{u=0} = \Phi(t, \phi)$$

であり、(5), (6) より次の関係式が得られる。

$$(\ell \partial_t \pm \partial_\phi) \left(\frac{1}{\ell} \xi^t \mp \xi^\phi \right) = 0 \quad (u = 0)$$

この式は境界上の光錐座標 $x^\pm = \frac{1}{\ell} t \pm \phi$ に対する変換が

$$x^\pm \rightarrow x^\pm + \xi^\pm(x^\pm) \quad (u = 0)$$

のように与えらることを意味しており、まさに 3 次元 AdS 時空の境界に作用する 2 次元の共形変換を表していることが分かる。

4. 今後の課題

ここでは論文 [1] に沿って負の宇宙項を持った 3 次元重力理論の解が持つ漸近対称性が境界の 2 次元空間に作用する共形対称性として解釈できることを議論した。論文 [1] ではさらに正準形式で対称性の生成子を導入し、共形対称性の中心拡大や中心電荷の議論を行っている。こうした解析はさらに別のシステムに応用されたり、ブラックホールエントロピーの計算に用いられるといった進展もある。今後はこうした方面の研究を行いたい。

参考文献

- [1] J. D. Brown and M. Henneaux, “Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity,” Commun. Math. Phys. **104** (1986) 207.
- [2] 福間将文・酒谷雄峰 共著：「重力とエントロピー 重力の熱力学的性質を理解するために」SGC ライブラリ 112, サイエンス社, (2014).