O-38

減衰調和振動子の正準量子化

Canonical quantization of the damped harmonic oscillator

○藤原侑樹 [1],　中野邦彦 [2],　出口真一 [3]
*Yuki Fujiwara[1], Kunihiko Nakano[2], Shinichi Deguchi[3]

Abstract : We study procedures of the canonical quantization of the damped harmonic oscillator.

1．導入

加速度運動する荷電粒子は, 自身が放射する電磁波により, 反作用を受ける. 輻射の反作用を取り入れた荷電粒子の運動方程式は, 位置の時間に関する 3 階微分を含み, 暴走解などの現実にそぐわない運動を表す解をもつ.

この力学系は散逸系であるので, 量子化する際に散逸系の量子論を論じる必要がある. 我々は, 先行研究において, 単純な散逸系の量子論の例である減衰調和振動子の量子化を参考にして, 定磁場中においてこの力学系を解析したが, 幾つかの課題が挙げられた [1]. これらを解決するために, より単純な 1 次元減衰調和振動子の量子化の考察をすることが本研究の目的である.

1 次元減衰調和振動子の運動方程式は

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0, \quad 4mk > \gamma^2 \tag{1}$$

で与えられる. ここで, m は質点の質量, $x = x(t)$ は質点の座標, γ は減衰係数, k はばね定数である. 式 (1) を導くラグランジアンとして, あらわな時間依存性を持つものと持たないものの 2 種類が知られている. あらわに時間依存するラグランジアンは, 量子化した際に不確定性関係が破れるため, 量子化の議論には不向きであると論ずる文献もある [2]. 本研究では仮想的な自由度を含む, あらわに時間依存しないラグランジアンを扱い, 量子化の議論を行う.

2．1 次元調和振動子の正準量子化

式 (1) を導くあらわに時間依存しないラグランジアンは

$$L = m\dot{x}\dot{y} + \frac{1}{2}\gamma\left(x\dot{y} - \dot{x}y\right) - kxy \tag{2}$$

と与えられる [3]. ここで, y は x の時間反転に対応する仮想的な座標変数である. 式 (2) から, 正準運動量が $P_x = m\dot{y} - \frac{1}{2}\gamma y$, $P_y = m\dot{x} + \frac{1}{2}\gamma x$ と求まり, 正準ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{m}P_xP_y + m\omega^2 xy + \frac{\Gamma}{2\hbar}\left(yP_y - xP_x\right) \tag{3}$$

と求まる. ここで, $\omega := \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}}$, $\Gamma := \frac{\hbar\gamma}{m}$ であり, ポアソン括弧は $\{x, P_x\} = 1$, $\{y, P_y\} = 1$ と与えられる.

正準変数 x, P_x, y, P_y を演算子 $\hat{x}$, $\hat{P}_x$, $\hat{y}$, $\hat{P}_y$ に, ポアソン括弧を交換関係 $\left[\hat{x}, \hat{P}_x\right] = i\hbar$, $\left[\hat{y}, \hat{P}_y\right] = i\hbar$ に置き換えることで量子化を行う. 式 (3) からハミルトニアン演算子 $\hat{H}$ を得た後に, 演算子 $\hat{x}$, $\hat{P}_x$, $\hat{y}$, $\hat{P}_y$ の線形結合をとり, 新たな演算子 $A, A^\dagger, B, B^\dagger$ を定義する. このとき, 交換関係は $\left[A, A^\dagger\right] = 1, \left[B, B^\dagger\right] = 1$ となり, $\hat{H}$ は

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(A^\dagger A - B^\dagger B\right) + \frac{i\Gamma}{2}\left(A^\dagger B^\dagger - AB\right) \tag{4}$$

となる. 演算子 B を消滅演算子として素朴な真空状態を定義すると, 式 (4) からエネルギー固有値 ($\hbar\omega$ に比例する部分) の正定値性が満たされないことがわかる. これに対して, 以下では 2 つの異なる量子化法（適切な量子化条件の設定）を適用して, この問題を回避する.

3．フィッシュバッハ・ティコスキーの量子化法

まず, 減衰調和振動子の文献に数多く引用されている, フィッシュバッハとティコスキーの論文 [4] を紹介する.

初めに, 演算子 $X := \frac{1}{2}\left(A^\dagger B^\dagger + AB\right)$, $Y := i\frac{1}{2}\left(A^\dagger B^\dagger - AB\right)$, $Z := \frac{1}{2}\left(A^\dagger A + BB^\dagger\right)$ を定義する. これらは $su(1,1)$ リー代数を満たす. 演算子 X, Y, Z と交換するカシミア演算子は $h_0 := \frac{1}{2}\left(A^\dagger A - B^\dagger B\right)$ で与えられ, $h_0^2 - \frac{1}{4} = -X^2 - Y^2 + Z^2$ を満たす. 以上の Y, h_0 を用いると, 式 (4) は

$$\hat{H} = 2\hbar\omega h_0 + \Gamma Y \tag{5}$$

と書くことができる.

次に, 数演算子 $N_A := A^\dagger A$ と $N_B := B^\dagger B$ を定義する. 数演算子 N_A, N_B の固有値 n_A, n_B は 0 を含む自然数であり, これらを用いて, N_A と N_B の同時固有状態 $|n_A, n_B\rangle$ が指定される. この状態を $|j, m\rangle$ $\left(m := \frac{1}{2}\left(n_A + n_B\right),\right.$ $\left.j := \frac{1}{2}\left(n_A - n_B\right)\right)$ と表すと, Z と h_0 の固有値方程式は $Z|j, m\rangle = \left(m + \frac{1}{2}\right)|j, m\rangle$, $h_0|j, m\rangle = j|j, m\rangle$ と書ける. ここで, j と m のとりうる値は $j = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \cdots$, $m = |j|, |j| + 1, |j| + 2, \cdots$ となる.

いま, $Y = \pm i e^{\mp\frac{\pi}{2}X} Z e^{\pm\frac{\pi}{2}X}$ という関係式と Z の固有値方程式を用いると, Y の固有値方程式が

$$Y|\psi_{\pm jm}\rangle = \pm i\left(m + \frac{1}{2}\right)|\psi_{\pm jm}\rangle \tag{6}$$

と得られる. ただし, $|\psi_{\pm jm}\rangle$ は $|\psi_{\pm jm}\rangle := e^{\mp\frac{\pi}{2}X}|j, m\rangle$ で定義され, h_0 の固有値方程式 $h_0|\psi_{\pm jm}\rangle = j|\psi_{\pm jm}\rangle$ も満たす. 以上のことから, 式 (5) に $|\psi_{\pm jm}\rangle$ を作用すると, 固有値が

$$E = \hbar\omega(n_A - n_B) \pm i\frac{\Gamma}{2}(n_A + n_B + 1) \tag{7}$$

[1] 日大理工・院 (後)・量子　[2] 錦城高等学校　[3] 日大・量科研

$(n_A, n_B = 0, 1, 2, \cdots)$ と求まる．ここで, n_B には上限がないため, エネルギー固有値 (実部) は不定値となる．式 (7) を用いると, シュレーディンガー方程式の特殊解が

$$|\psi_{\pm jm}(t)\rangle = \mathrm{e}^{-i\omega(n_A-n_B)t}\mathrm{e}^{\pm\frac{\gamma}{2m}(n_A+n_B+1)t}|\psi_{\pm jm}\rangle \quad (8)$$

と求まる．この式より $|\psi_{+jm}\rangle$ は粒子が放出される過程を表し, $|\psi_{-jm}\rangle$ は粒子が崩壊または吸収される過程を表していると解釈できる．

演算子 Y の規格化積分は, 素朴な内積を定義すると発散する．また, Y は形式的に自己共役であるように見えるが, 式 (6) からその固有値は純虚数であることがわかる．これらは, Y に関する固有ベクトルが明確に定義されていないことが原因になっている．この問題を解決するために, X, Y, Z の特別な微分演算子表現

$$\begin{aligned} X &= -i\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi} - i\left(j-\frac{1}{2}\right)\sin\phi, \\ Y &= -i\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi} + i\left(j-\frac{1}{2}\right)\cos\phi, \\ Z &= i\frac{\partial}{\partial\phi}, \quad 0 \le \phi \le 2\pi \end{aligned} \quad (9)$$

を採用する．実際に, 式 (9) の表現に基づき, 固有関数 ψ_{jm} を具体的に求め, 随伴共役と内積の定義を変更することで規格化積分の発散が回避され, エネルギー固有値の正定値性が保障される．このとき, Y は自己共役ではなく, 固有値が純虚数であることの正当性を示すことができる．式 (9) を採用することで, $n_A - n_B$ が正であるような場合のみに正しい量子化が行われることもわかる．

４．新たな量子化法

続いて, 最近提案された量子化法を紹介する [5]．演算子 C, D とその随伴共役 ‡ を

$$C = iA,\ C^\ddagger = -iA^\dagger,\ D = -iB^\dagger,\ D^\ddagger = -iB \quad (10)$$

と定義する．これらの交換関係は $\left[C, C^\ddagger\right] = 1, \left[D, D^\ddagger\right] = 1$ となり, 式 (4) は

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(C^\ddagger C + D^\ddagger D + 1\right) - i\frac{\Gamma}{2}\left(C^\ddagger D + D^\ddagger C\right) \quad (11)$$

のように書き換えられる．次に, C, $C^\ddagger$, D, $D^\ddagger$ の線形結合をとり, 新たな演算子 R, $R^\ddagger$, S, $S^\ddagger$ を定義することで $\hat{H}$ を対角化する．これらの交換関係は $\left[R, R^\ddagger\right] = 1, \left[S, S^\ddagger\right] = 1$ となり, 式 (11) は

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(R^\ddagger R + S^\ddagger S + 1\right) - i\frac{\Gamma}{2}\left(R^\ddagger R - S^\ddagger S\right) \quad (12)$$

となる．真空状態 $|0\rangle\rangle$ を $R|0\rangle\rangle = S|0\rangle\rangle = 0$ と定義すると, R, S は消滅演算子として, また, $R^\ddagger, S^\ddagger$ は生成演算子として扱われる．随伴共役として ‡ を採用し, 真空状態の定義を変更することで, エネルギー固有値とヒルベルト空間の正定値性が保障される．しかし, 随伴共役 ‡ に関して, 式 (11) と式 (12) は自己共役ではない．実際に, 数演算子 $N_R := R^\ddagger R$, $N_S := S^\ddagger S$ を用いて式 (12) は

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(N_R + N_S + 1\right) - i\frac{\Gamma}{2}\left(N_R - N_S\right) \quad (13)$$

と書くことができる．数演算子 N_R, N_S の固有値 n_R, n_S は 0 を含む自然数であり, これらを用いて, N_R と N_S の同時固有状態 $|n_R, n_S\rangle\rangle$ が指定される．式 (13) に $|n_R, n_S\rangle\rangle$ を作用すると, $\hat{H}$ の固有値が

$$E = \hbar\omega\left(n_R + n_S + 1\right) - i\frac{\Gamma}{2}\left(n_R - n_S\right) \quad (14)$$

と得られ, シュレーディンガー方程式の特殊解が

$$|\psi(t)\rangle\rangle = \mathrm{e}^{-i\omega(n_R+n_S+1)t}\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2m}(n_R-n_S)t}|n_R, n_S\rangle\rangle \quad (15)$$

と求まる．この式は $n_R < n_S$ の場合には粒子が放出される過程を表し, $n_R > n_S$ の場合には粒子が崩壊または吸収される過程を表している．

５．２つの量子化法の比較

第 3 章と第 4 章で紹介した, 2 つの量子化法の比較を行う．まず, ハミルトニアン演算子に注目する．式 (5), 式 (12) は, どちらも新たに定義した随伴共役に対して自己共役ではなく, その固有値に虚数部分が含まれる．続いて, 式 (7) と式 (14) のエネルギー固有値 ($\hbar\omega$ に比例する部分) に注目する．式 (7) は差 $n_A - n_B$ で表されるため, 不定値となるが, 式 (9) の表現を採用することにより正定値性が満たされる．一方, 式 (14) は和 $n_R + n_S$ で表されるため, 正定値性が満たされる．次に, 数演算子の固有値がいずれも 0 の場合 $\left(n_A = n_B = 0,\ n_R = n_S = 0\right)$ を考える．式 (7) は $E = \pm i\frac{\Gamma}{2}$ となり, 零点エネルギーの項が残らない．一方, 式 (14) は $E = \hbar\omega$ となり, 零点エネルギーの項が残る．

６．まとめと今後の課題

あらわに時間依存しない減衰調和振動子のラグランジアンから正準量子化を行う際に, エネルギー固有値の正定値性が満たされない問題が生じるが, この問題を回避する 2 つの異なる量子化法を紹介した．その後, これらの量子化法の比較を行った．今後の課題として, 第 3 章の特別な微分演算子表現を採用することの正当性や, 第 4 章の随伴共役と真空状態を採用することの正当性を考察することなどが挙げられる．

参考文献

[1] 藤原侑樹 修士論文 (2016).
[2] D. Greenberger, J. Math. Phys. **20** 762-770, (1979).
[3] H. Bateman, Phys. Rev. **38** 815-819, (1931).
[4] H. Feshbach, Y. Tikochinsky, Trans. N. Y. Acad. Sci. **38** 44-53, (1977).
[5] 園田真司 修士論文 (2015).