P-1

カラテオドリ数の上界について
A bound on the Carathéodory number

○伊藤勝 [1]
*Masaru Ito[1]

Abstract: The Carathéodory number $\kappa(K)$ of a pointed closed convex cone K is the minimum among all the κ for which every element of K can be written as a nonnegative linear combination of at most κ elements belonging to extreme rays. Carathéodory's Theorem gives the bound $\kappa(K) \leq \dim K$. In this work we observe that this bound can be sharpened to $\kappa(K) \leq \ell_K - 1$, where ℓ_K is the length of the longest chain of nonempty faces contained in K. We show that this bound is tight for several families of cones, which include symmetric cones and the so-called smooth cones.

1. はじめに

凸集合 $C \subset \mathbb{R}^n$ の空でない凸部分集合 $F \subset C$ について「$x, y \in C,\ \alpha \in (0,1),\ \alpha x + (1-\alpha)y \in F \Rightarrow x, y \in F$」が成り立つとき, F を C の**面**と呼ぶ.

$K \subset \mathbb{R}^n$ を直線を含まない閉凸錐 (すなわち K は閉凸集合かつ $\alpha K \subset K, \forall \alpha > 0$ を満たす) とする. $d \in K \setminus \{0\}$ が K の**端線**であるとは, 半直線 $\{\alpha d \mid \alpha \geq 0\}$ が K の面となることをいう. いま $x \in K$ の**カラテオドリ数** $\kappa(x)$ を,

$$\kappa(x) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \exists d_i : K \text{ の端線 s.t. } x = d_1 + \cdots + d_k\}$$

で定義し, また K の **カラテオドリ数** $\kappa(K)$ を

$$\kappa(K) := \max\{\kappa(x) \mid x \in K\}$$

と定める.

カラテオドリ数はその錐に関する幾何情報として, しばしば興味の対象となる. また他の特徴量との興味深い関係が得られることもある. 例えば, 対称錐に対するカラテオドリ数はその錐上で定義できる自己整合障壁関数のパラメータの下限に一致することが知られている [1].

カラテオドリの定理によるよく知られた $\kappa(K)$ の上界として

$$\kappa(K) \leq \dim K$$

がある. 本研究では, K の面からなる減少列の最大長を ℓ_K と書くとき, 上記の $\kappa(K)$ の上界が以下のように改良できることを報告する.

定理 1 $K \subset \mathbb{R}^n$ を直線を含まない閉凸錐とするとき,

$$\kappa(K) \leq \ell_K - 1. \tag{1}$$

本結果は有界閉凸集合 C に対して言い換えることもできる. $\{x\}$ が C の面となるとき, x を C の**端点**という. $x \in C$ に対して $\kappa(x)$ を「x を凸包に含む端点集合の最小要素数」とするとき, C のカラテオドリ数 $\kappa(C) := \max_{x \in C} \kappa(x)$ は上界

$$\kappa(C) \leq \ell_C \leq \dim C + 1$$

を持つ.

1: 日大理工・教員・数学

2. いくつかの例

本研究では, 以下の 3 つの場合について, 上界 (1) における等号 $\kappa(K) = \ell_K - 1$ が成り立つことを示した.

(i) K が対称錐であるとき, すなわち K は内点を持ち, 自己双対かつ等質 (任意の 2 点 $x, y \in \operatorname{int} K$ はある K の自己同型写像によって写り合う) であるとき, 対称錐 K に付随するユークリッド的ジョルダン代数が定義する K の階数 $\operatorname{rank} K$ に対して次が成り立つ.

$$\kappa(K) = \ell_K - 1 = \operatorname{rank} K \tag{2}$$

(ii) 集合 $\{F \mid F \text{ は } K \text{ の面}, \dim F = 1\}$ が高々可算であるとき, $\kappa(K) = \ell_K - 1 = \dim K$ が成り立つ.

(iii) K が狭義凸錐 (すなわち, $\dim K = n$ かつ K と $\{0\}$ 以外の面は常に次元が 1) であるとき, $\kappa(K) = \ell_K - 1 = 2$ が成り立つ.

対称錐は n 次半正定値行列錐 (階数 n) やローレンツ錐 (階数 2) などを含む錐のクラスである. 本研究では, ジョルダン代数の基本的な道具を用いて (2) を示した. この際, 我々は等式 $\kappa(K) = \operatorname{rank} K$ について既存の証明 [1] よりも簡略的なものを与えた.

K が凸多面錐であるとき, K の次元 1 の面は有限個であるから, (ii) の等式が成り立つ. 例えば, これによって $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上の非負対角行列錐 T_n について $\kappa(T_n) = n$ とわかり, T_n が非負かつ正定値行列全体からなる錐 $\mathcal{D}_n$ の面であることと合わせると, 以下の下界が得られる.

$$\kappa(\mathcal{D}_n) \geq n$$

$n \leq 4$ に対しては $\kappa(\mathcal{D}_n) = n$ であるが, $n \geq 5$ に対して $\kappa(\mathcal{D}_n)$ は未だ知られていない. $\kappa(\mathcal{D}_n)$ の上界について定理 1 は $\ell_{\mathcal{D}_n} - 1 = \dim \mathcal{D}_n = n(n+1)/2$ を与えるのみである.

狭義凸錐の例として $p \in (1, \infty)$ に対する p 次錐 $K_p = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid t \geq \|x\|_p\}$ などがある. 狭義凸錐に対する (iii) の事実は [3] に直接的な証明がある. 定理 1 によれば (iii) は狭義凸錐の定義より直ちに従う.

上界 (1) において等号が成り立たない例をひとつ挙げよう. 例えば, 以下の閉凸錐

$$K = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid t \geq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},\ x_2, \ldots, x_n \geq 0 \right\}$$

について $\kappa(K) = 2$ である一方 $\ell_K - 1 = \dim K = n + 1$ が成り立つ.

3. おわりに

本研究では, カラテオドリ数 $\kappa(K)$ について ℓ_K を用いた上界 (1) を報告した. また, 対称錐や狭義凸錐などについて (1) の等号が成り立つことを示した.

他の錐に対して, カラテオドリ数の新しい上界を得るのに (1) が有用である可能性もある. 例えば, 完全正値錐

$$\mathcal{C}_n = \left\{ X \in \mathbb{R}^{n\times n} \;\middle|\; \exists r \in \mathbb{N},\ \exists u_i \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} \ \text{ s.t. } \ X = \sum_{i=1}^{r} u_i u_i^T \right\}$$

(ただし ^{T} は行列の転置を表す) について, $X \in \mathcal{C}_n$ の cp-rank は, $X = \sum_{i=1}^{r} u_i u_i^T$ $(u_i \in \mathbb{R}^n_{\geq 0})$ と表せる最小の r と定義される. cp-rank やその上界を求めることは, 完全正値錐に関して取り組まれている課題のひとつである. ここで, $\mathcal{C}_n$ の端線全体の集合は $\{uu^T \mid u \geq 0, u \neq 0\}$ で与えられるから, 完全正値行列の cp-rank とカラテオドリ数が等しいことがわかる. 完全正値錐に対して, (1) から cp-rank の上界を考察することは今後の課題のひとつである.

4. 参考文献

[1] Osman Güler and Levent Tunçel, Characterization of the barrier parameter of homogeneous convex cones, *Mathematical Programming*, **81**(1):55–76, 1998.

[2] Masaru Ito and Burno F. Lorenço, A bound on the Carathéodory number, *arXiv:1608.07170*, 2016.

[3] Levent Tunçel and Song Xu, On homogeneous convex cones, the Carathéodory number, and the duality mapping, *Mathematics of Operations Research*, **26**:234–247, 2001.