P-11

無限大 Laplace 方程式と最適 Lipschitz 拡張の関係について
The relationship between optimal Lipschitz extensions and infinity Laplace equations

菊池 真 [1]
Shin Kikuchi [1]

Abstract: We consider the relationship between optimal Lipschitz extensions and infinity Laplace equations studied by Jensen [5] and Crandall-Evans-Gariepy [3]. First, the notions of the optimal Lipschitz extension and the viscosity solution of the infinity Laplace equation are presented. Next, we show that optimal Lipschitz extensions are viscosity solutions of the infinity Laplace equation via the property of "comparison with cones."

1. 無限大 Laplace 方程式

滑らかな境界を持つ有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ に対し,

$$-(u_{xx}u_x^2 + 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}u_y^2) = 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{1}$$

を考える. ここで $u : \Omega \to \mathbb{R}$ は未知関数であり, $u_{xx} := \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_x := \dfrac{\partial u}{\partial x}$ 等を表す. u, v が方程式 (1) の解であったとしても $u+v$ が解になるとは限らない. さらに, (1) はベクトル場 F を用いて $-\operatorname{div} F(x, u, u_x, u_y) = 0$ と書くことができない. 従って, (1) は非発散型完全非線形偏微分方程式である. 他方, 方程式 (1) は $\mathbb{R}^n$ の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を用いて,

$$-\langle D^2uDu, Du\rangle = 0$$

と表すことができる. 一般に $n \in \mathbb{N}$ と有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω 上の滑らかな関数 u に対し,

$$-\Delta_\infty u := -\langle D^2uDu, Du\rangle$$

と定めたとき, $-\Delta_\infty$ を無限大 Laplace 作用素という. 本研究では, 2 次元における無限大 Laplace 方程式 (1) と, 次の章で述べる最適 Lipschitz 拡張との関係について Jensen [5], Crandall-Evans-Gariepy [3] による解析手法を考察する.

2. Lipschitz 拡張

Ω 上の関数 v に対し,

$$\mathrm{Lip}(v, \Omega) := \sup_{\substack{(x_j, y_j)\in\Omega\ (j=1,2),\\ (x_1, y_1)\neq(x_2, y_2)}} \frac{|v(x_1, y_1) - v(x_2, y_2)|}{|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)|}$$

と定める. $\mathrm{Lip}(v, \Omega)$ が有界な関数を Lipschitz 関数という.

$$\mathrm{Lip}(\Omega) := \left\{ v \in C(\Omega) \;\middle|\; \mathrm{Lip}(v, \Omega) < \infty \right\}$$

と定める. $g \in \mathrm{Lip}(\partial\Omega)$ に対し, 次が知られている.

命題 2.1 (Jensen [5, Lemma 1.6]). $g \in \mathrm{Lip}(\partial\Omega)$ と $\partial\Omega$ で $w = g$ をみたす任意の $w \in \mathrm{Lip}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ に対し,

$$\mathrm{Lip}(w, \Omega) \geq \mathrm{Lip}(g, \partial\Omega)$$

が成り立つ.

命題 2.2 (Jensen [5, Theorem 1.8]). $g \in \mathrm{Lip}(\partial\Omega)$ に対し, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ を

$$u(x, y) = \inf_{(\eta, \xi)\in\partial\Omega} \left(g(\eta, \xi) - \mathrm{Lip}(g, \partial\Omega)\big|(x, y) - (\eta, \xi)\big| \right)$$

と定めたとき

$$\begin{aligned} &u = g \text{ on } \partial\Omega,\ u \in \mathrm{Lip}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \\ &\mathrm{Lip}(u, \Omega) \leq \mathrm{Lip}(g, \partial\Omega) \end{aligned} \tag{2}$$

が成り立つ.

一般に (2) をみたす u を g の Lipschitz 拡張という. そこで, Lipschitz 拡張された関数 u の $\mathrm{Lip}(u, \Omega)$ を最小化する問題を考える.

定義 2.3 (最小 Lipschitz 拡張). $g \in \mathrm{Lip}(\partial\Omega)$ に対し, 関数 u が g の最小 Lipschitz 拡張であるとは, $\partial\Omega$ 上 $u = g$ であり, $\partial\Omega$ 上 $w = g$ をみたす任意の $w \in \mathrm{Lip}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ に対し,

$$\mathrm{Lip}(u, \Omega) \leq \mathrm{Lip}(w, \Omega)$$

が成り立つことをいう.

例 2.4 (Jensen [5, P. 53]). $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ とし, $\partial\Omega$ 上の関数 g を $(x, y) \in \partial\Omega$ に対し, $g(x, y) := 2xy$ と定義する. 任意の $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ に対し,

$$u^\alpha(x, y) = \begin{cases} 0 & (x^2 + y^2 \leq \alpha^2), \\ \dfrac{2xy(\sqrt{x^2 + y^2} - \alpha)}{(1 - \alpha)(x^2 + y^2)} & (\alpha^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1) \end{cases}$$

とおくと, 各 $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ に対し, $\mathrm{Lip}(u^\alpha, \Omega) = \mathrm{Lip}(g, \partial\Omega)$ より u^α は g の最小 Lipschitz 拡張となる. $\alpha, \beta \in [0, \frac{1}{2}]$ に対し, $\alpha \neq \beta$ ならば $u^\alpha \neq u^\beta$ より最小 Lipschitz 拡張は一意でない.

1: 日大理工・院 (前)・数学

そこで Aronsson [1] が以下の定義を与えた.

定義 2.5 (最適 Lipschitz 拡張)**.** $g \in \mathrm{Lip}(\partial\Omega)$ に対し, u が g の最適 Lipschitz 拡張であるとは, $\partial\Omega$ 上 $u = g$ であり, 滑らかな境界を持つ任意の部分領域 $\Omega' \subset \Omega$ と, $\partial\Omega'$ 上 $w = u$ をみたす任意の $w \in \mathrm{Lip}(\Omega') \cap C(\overline{\Omega'})$ に対し,

$$\mathrm{Lip}(u, \Omega') \le \mathrm{Lip}(w, \Omega')$$

が成り立つことをいう.

$u \in C^2(\Omega)$ が最適 Lipschitz 拡張ならば方程式 (1) の解となることを Aronsson が示した [1, 2].

3. ∞-Laplace 方程式と最適 Lipschitz 拡張の関係

$g \in \mathrm{Lip}(\partial\Omega)$ のLipschitz 拡張 $u \in \mathrm{Lip}(\Omega)$ を考えるうえで, u に C^2 級を仮定することは妥当ではない. Jensen [5] は, 粘性解を用いて (1) の弱解を定式化した.

定義 3.1 (粘性解)**.** Ω 上の上半連続関数 u が方程式 (1) の粘性劣解であるとは, 任意の $\phi \in C^2(\Omega)$ と $(\hat{x}, \hat{y}) \in \Omega$ に対し,

$$(u - \phi)(\hat{x}, \hat{y}) \ge (u - \phi)(x, y) \qquad \forall (x, y) \in \Omega$$

が成り立つとき,

$$-(\phi_{xx}\phi_x^2 + 2\phi_{xy}\phi_x\phi_y + \phi_{yy}\phi_y^2)(\hat{x}, \hat{y}) \le 0$$

をみたすことをいう. Ω 上の連続関数 u が方程式 (1) の粘性解であるとは, u と $-u$ が方程式 (1) の粘性劣解であることをいう.

Jensen は, 粘性解を導入することにより, (1) と最適 Lipschitz 拡張の関係を明らかにした.

定理 3.2 (Jensen [5, Theorem 1.15])**.** $g \in \mathrm{Lip}(\partial\Omega)$ に対し, u が g の最適 Lipschitz 拡張ならば, u は方程式 (1) の粘性解となる.

以下の証明は, Crandall-Evans-Gariepy [3, Theorem 3.1] の手法に基づく.

定理 3.2 の証明の概略. 背理法で示す. u は最適 Lipschitz 拡張であるが, (1) の粘性劣解でないとする. すると平行移動により $u(0, 0) = 0$ とし,

$$(u - \phi)(0, 0) > (u - \phi)(x, y) \quad (\forall (x, y) \in \Omega \setminus (0, 0)) \tag{3}$$

$$-(\phi_{xx}\phi_x^2 + 2\phi_{xy}\phi_x\phi_y + \phi_{yy}\phi_y^2)(0, 0) \ge 0 \tag{4}$$

をみたす $\phi \in C^2(\Omega)$ が存在すると仮定してよい. 回転変換により正の定数 p を用いて, $D\phi(0, 0) = (p, 0)$ と仮定できて, (4) より $\phi_{xx}(0, 0) < 0$ となるため, スケール変換により $\phi_{xx}(0, 0) = -4$ としてよい.

ϕ の原点での Taylor 展開と $\phi_{xx}(0, 0) = -4$ より, ある $K \in \mathbb{R}$ について, すべての $(x, y) \in \Omega \setminus (0, 0)$ に対し,

$$u(x, y) \le \phi(x, y) - \phi(0, 0) \le px - x^2 + Ky^2 \tag{5}$$

が成り立つ. $r > 0$ に対し, $(-r, 0)$ を頂点とする錐

$$C(x, y) = -pr - r^2 + p|(-r, 0) - (x, y)|$$

を考えると $\mathrm{Lip}(C, \mathbb{R}^2) = p$ となる. 十分小さい $r > 0$ に対し, $x^2 + y^2 = r^2$ をみたす $(x, y) \in \Omega$ について

$$u(x, y) < px - x^2 + Ky^2 \le C(x, y)$$

が成り立つ. また, $C(0, 0) < u(0, 0)$ より,

$$u = C \quad \text{on } \partial\Omega', \qquad u > C \quad \text{in } \Omega'$$

をみたす原点の近傍 Ω' がとれる. (5) より $(x, 0) \in \Omega'$ のとき $C(x, 0) < u(x, 0) - u(0, 0) < px - x^2 < 0$ だから

$$\mathrm{Lip}(u, \Omega') = \frac{|u(x, 0) - u(0, 0)|}{|x|} \ge |x| + p > p$$

となる. 従って $\mathrm{Lip}(C, \Omega') = p < \mathrm{Lip}(u, \Omega')$ となるが, u が最適 Lipschitz 拡張であることに矛盾する. □

注意 3.3. 定理 3.2 の結果から $g \in \mathrm{Lip}(\partial\Omega)$ に対し, g の最適 Lipschitz 拡張 u が存在し, u が方程式 (1) の唯一の粘性解であるならば u は g の一意な最適 Lipschitz 拡張になる. よって, 最適 Lipschitz 拡張の一意性の問題を方程式 (1) の解の一意性の問題に帰着することができる.

4. 参考文献

[1] G. Aronsson, *Extension of functions satisfying Lipschitz conditions*, Ark. Mat. **6** (1967), 551–561.

[2] G. Aronsson, *On the partial differential equation* $u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0$, Ark. Mat. **7** (1968), 395–425.

[3] M. G. Crandall, L. C. Evans, and R. F. Gariepy, *Optimal Lipschitz extensions and the infinity Laplacian*, Calc. Var. Partial Differential Equations **13** (2001), 123–139.

[4] L. C. Evans and R. F. Gariepy, Measure theory and fine properties of functions. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, FL, 1992.

[5] R. Jensen, *Uniqueness of Lipschitz extensions: minimizing the sup norm of the gradient*, Arch. Rational Mech. Anal. **123** (1993), 51–74.

[6] S. Koike, A beginner's guide to the theory of viscosity solutions, MSJ Memoirs, 13. Mathematical Society of Japan, 2004.