P-2

フロッグモデルにおける情報伝達速度の末尾評価

○久保田直樹[1]

1　はじめに

本稿では，多次元正方格子上における粒子系の一種である “フロッグモデル” についての話題を扱う．まず簡単に，このモデルについて紹介する (詳しい定義については，次章を参照されたい)．次の (1)–(3) のルールに則り，時間発展とともに多次元正方格子上で連鎖的に動くカエル達を考える:

(1) 原点にのみ “目が覚めているカエル” を配置し，その他の各頂点には “眠っているカエル” がいるとする．ただし，各頂点に配置されるカエルの数はランダムに決まり，かつ高々有限個であるとする．
(2) 目が覚めているカエルはすぐに運動を開始し，今いる頂点の隣接から等確率で 1 つ選び移動していく．
(3) 初めのうち眠っているカエルは動かないが，目覚めて運動しているカエルに出会うと目覚めて (2) のように運動する．

これを**フロッグモデル**と呼ぶ (“カエルが目覚めて動き回る” というイメージの代わりに “卵が孵ってヒナが動き回る” と比喩することもあるため，**エッグモデル**とも呼ばれている)．今はイメージし易いように “カエル” を用いて説明したが，カエルを 1 つの粒子とみなせば，フロッグモデルは多次元正方格子上における粒子系の一種として考えられる．そのため，フロッグモデルの研究は，実社会で起こる様々な現象の解析に役立つと期待できる．例えば,「ネットワーク上での情報伝達」や「人の移動による病気感染」の観測，はたまた「アリが巣にえさを運ぶ様子」の観測にいたるまで幅広い応用が考えられる．

フロッグモデルにおいて最初に確認された現象は,「確率 1 で原点はカエル達に無限回訪問される」という “再帰性” であった [8, 10]．近年，これに関する研究が積極的に行われ，フロッグモデルは非常に強い再帰性を持つことが分かっている [3, 4, 5, 6, 7] (例えば，木構造を持つグラフや高次元正方格子といった空間構造，または粒子へのドリフトは単一粒子の再帰を妨げる傾向を持つが，その様な状況においてもフロッグモデルでは再帰性が見出される場合がある)．一方で Alves ら [2, 1, 9] により,「目覚めたカエルが多次元正方格子上のある頂点に最短で到達する時間」の研究が行われた．それにより最短到達時間は，到達する頂点の ℓ^1-ノルムの定数倍程度であることが証明された．これを受け,「最短到達時間が到達する頂点の ℓ^1-ノルムからズレる確率はどのくらい小さいか？」という自然な問題が浮かんでくる．今回これについて考察し，フロッグモデルの最短到達時間に対し新たに末尾評価を得ることができた．その結果については第 3 章で紹介するが，まず第 2 章でフロッグモデルの厳密な定義を行い，結果を述べるための準備を行う．

2　フロッグモデルの定義

d を 2 以上の自然数とし，$\mathbb{Z}^d$ を d 次元正方格子とする．また，P^x を点 $x \in \mathbb{Z}^d$ から出発する $\mathbb{Z}^d$ 上の単純対称乱歩の分布とし，P^{RWs} を次で定義された $\Sigma := (\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}}$ 上の直積測度とする:

$$P^{\mathrm{RWs}} := \left(\bigotimes_{x \in \mathbb{Z}^d} P^x \right)^{\otimes \mathbb{N}}.$$

さらに，ν を $\mathbb{N}_0$ 上のある確率測度とし，$\Omega := (\mathbb{N}_0)^{\mathbb{Z}^d}$ 上の直積測度 $\mathbb{P} := \nu^{\otimes \mathbb{Z}^d}$ を考える．Σ の元を $\mathbb{S} = (S_k(x, \ell))_{k \geq 0, x \in \mathbb{Z}^d, \ell \geq 1}$，$\Omega$ の元を $\omega = (\omega(x))_{x \in \mathbb{Z}^d}$ と書くことにする．第 1 章に沿って説明すれば，

[1] 日大理工・教員・一般

ω は「カエルの初期配置」(特に，$\omega(x)$ は「頂点 x に配置されたカエルの数」) を，そして $(S_k(x,\ell))_{k=0}^{\infty}$ $(1 \le \ell \le \omega(x))$ は「頂点 x に配置されたカエルが目覚めた後にどう動くか」を表している．

以上の準備の下，今回の題材であるフロッグモデルの最短到達時間を定義する．各 $\omega \in \Omega$ と $\mathbb{S} \in \Sigma$ に対して，次の 2 点関数を考える:

$$t(x,y,\omega,\mathbb{S}) := \inf\{k \ge 0; \text{ある } 1 \le \ell \le \omega(x) \text{ が存在して } S_k(x,\ell) = y\}, \qquad x,y \in \mathbb{Z}^d.$$

ただし，$\omega(x) = 0$ の場合は $t(x,y,\omega,\mathbb{S}) := \infty$ と定める．この関数は「頂点 x から出発したカエルの中で，一番に頂点 y へ到りついたものの時間」を表している．そこで，次のように $t(\cdot,\cdot,\omega,\mathbb{S})$ を繋いでできる新たな 2 点関数によって，連鎖的に目覚めるカエルを経由して目的地へ到達する最短の時間が定義される:

$$T(x,y,\omega,\mathbb{S}) := \inf\left\{\sum_{i=0}^{n-1} t(x_i,x_{i+1},\omega,\mathbb{S}); \text{ある } n \ge 1 \text{ が存在して } x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y\right\}.$$

これを，フロッグモデルにおける点 x から点 y への**最短到達時間**という．

3　結果 — 最短到達時間の末尾評価

第 1 章で言及したように，本稿では「原点 0 に起きているカエルが配置されている」という状況を考えていることに注意する．そこで，$\Omega_0 := \{\omega \in \Omega; \omega(0) \ge 1\}$ とし，$\mathbb{P}(\Omega_0) > 0$ であると仮定する．このとき，原点 0 からある頂点 x への最短到達時間について，次の末尾評価を得ることができた．

Theorem 1. ある定数 C_1, C_2, C_3 と $\beta \in (0,1)$ が存在して，

$$\mathbb{P} \otimes P^{\mathrm{RWs}}(T(0,x) \ge C_1\|x\|_1 | \Omega_0) \le C_2 e^{-C_3\|x\|_1^{\beta}}, \qquad x \in \mathbb{Z}^d.$$

参考文献

[1] O. S. M. Alves, F. P. Machado, S. Y. Popov, and K. Ravishankar. The shape theorem for the frog model with random initial configuration. *Markov Process. Related Fields*, 7(4):525–539, 2001.

[2] O. Alves, F. Machado, and S. Y. Popov. The shape theorem for the frog model. *The Annals of Applied Probability*, 12(2):533–546, 2002.

[3] C. Döbler and L. Pfeifroth. Recurrence for the frog model with drift on zd. *Electron. Commun. Probab*, 19(79):13, 2014.

[4] N. Gantert and P. Schmidt. Recurrence for the frog model with drift on z. *Markov Process. Related Fields*, 15(1):51–58, 2009.

[5] C. Hoffman, T. Johnson, and M. Junge. Recurrence and transience for the frog model on trees. *arXiv:1404.6238*, 2014.

[6] C. Hoffman, T. Johnson, and M. Junge. From transience to recurrence with Poisson tree frogs. *The Annals of Applied Probability*, 26(3):1620–1635, 2016.

[7] E. Kosygina and T. Mountford. Crossing velocities for an annealed random walk in a random potential. *Stochastic Processes and their Applications*, 122(1):277–304, 2012.

[8] S. Y. Popov. Frogs in random environment. *Journal of Statistical Physics*, 102(1-2):191–201, 2001.

[9] S. Y. Popov. Frogs and some other interacting random walks models. In *DRW*, pp. 277–288, 2003.

[10] A. Telcs and N. C. Wormald. Branching and tree indexed random walks on fractals. *Journal of applied probability*, pp. 999–1011, 1999.