P–4

weighted graph 上のマルコフ連鎖の再帰性・非再帰性

冬木優斗 [1]
Yuto Fuyuki [1]

Abstract: We discuss several criteria for recurrence/transience of a Markov chain on a weighted graph, using effective resistance and capacity.

1　はじめに

研究対象はマルコフ連鎖の長時間での挙動である. 今回の講演では effective resistance や capacity によるマルコフ連鎖の再帰性・非再帰性の判定条件について概説する.

記号の定義をする. X を有限または可算無限集合とし, E を $\{\{x,y\}: x,y \in X, x \neq y\}$ の部分集合とする. これらの対 (X,E) をグラフという. $x,y \in X$ に対して, $\{x,y\} \in E$ ならば $x \sim y$ と書くことにする. 任意の $x,y \in X$ に対して, 列 $x_0 = x,\ x_1,...x_n = y$ であって $x_j \sim x_{j+1}(0 \leq j \leq n-1)$ が成り立つとき (X,E) は連結であるといい, 任意の $x \in X$ に対して, $\sharp\{y : \{x,y\} \in E\} < \infty$ となるとき (X,E) は局所的に有限である. 以下連結した局所的に有限なグラフについて考える. さらに, $X \times X$ 上の関数 μ_{xy} であって次の性質を満たすものが与えられているとする:

$$\mu_{xy} \begin{cases} > 0, & \{x,y\} \in E \\ = 0, & \{x,y\} \notin E. \end{cases}$$

この関数 μ_{xy} を weight といい, (X,μ) を weighted graph と呼ぶ. また, $\mu_x = \sum_{y \in X} \mu_{xy}$ に対し

$$\frac{\mu_{xy}}{\mu_x} \geq p_0,\ \forall x \sim y$$

が成り立つような $p_0 > 0$ が存在するとき, (X,μ) は controlled weights をもつといい, 以下これを仮定する.

次に weighted graph 上のマルコフ連鎖を導入する. $Y = \{Y_n\}_n$ を推移確率が

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = y | Y_n = x) = \frac{\mu_{xy}}{\mu_x} = P(x,y), \quad \forall x,y \in X$$

によって与えられる X 上のマルコフ連鎖とする. Y の初期分布が x に集中する, つまり x から出発するとき, その分布を $\mathbb{P}^x$ と書く.

最後に, マルコフ連鎖の再帰性・非再帰性と呼ぶ性質を導入する. このために, 次の停止時刻を導入する. $x \in X$ に対して, 停止時刻 σ_x^+ を次で定義する:

$$\sigma_x^+ = \inf\{n > 0 : Y_n = x\}.$$

これを用いてマルコフ連鎖の再帰性・非再帰性と呼ばれる性質を導入する.

[1]日大理工・院 (前)・数学

Definition 1.
$\mathbb{P}^x(\sigma_x^+ = \infty) = 0$ のとき, マルコフ連鎖 Y は $x \in X$ で再帰的であるという. $\mathbb{P}^x(\sigma_x^+ = \infty) > 0$ のとき, マルコフ連鎖 Y は $x \in X$ で非再帰的であるという.

再帰的であるとは, 点 x から出発したとき, 有限時刻で確率 1 で点 x に戻るということである. 非再帰的であるとは, 点 x から出発したとき, いつまで経っても点 x に戻らないことが確率正で起こるということである.

2　再帰性・非再帰性の判定条件

本節では, effective resistance, capacity によるマルコフ連鎖の再帰性・非再帰性の判定条件について述べる.

2.1　古典的な判定条件

古典的なマルコフ連鎖の再帰性・非再帰性の判定条件について述べる. 古典的なマルコフ連鎖の再帰性・非再帰性の判定条件は次のものである.

Theorem 2 ([3] Th. 1.13)**.**
Y は $x \in X$ で再帰的であることと以下は同値 :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}^x(Y_n = x) = \infty.$$

Theorem 3 ([3] Lem. 1.9)**.**
Y がある $x \in X$ で再帰的ならば, Y は任意の $x \in X$ で再帰的である.

$x \sim y$ と $\mu_{xy} = 1$ が同値であるとき Y はシンプルランダムウォークと呼ばれるマルコフ連鎖となる. d 次元ユークリッド空間の格子点全体 $\mathbb{Z}^d$ を頂点の集合とし, これらの点のうち距離が 1 の点の組 $\{x,y\}$ を辺とする無限グラフを考える. この上のシンプルランダムウォークは $d = 1,2$ のとき再帰的で, $d \geq 3$ のとき非再帰的であることが知られている (Pólya).

2.2 effective resistance による判定条件

effective resistance によるマルコフ連鎖の再帰性･非再帰性の判定条件について述べる. (X, μ) 上の二次形式 $\mathcal{E}(f, f)$ を, 次のように定義する. $f : X \to \mathbb{R}$ に対して

$$\mathcal{E}(f, f) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x;y \in X \\ y:x \sim y}} (f(x) - f(y))^2 \mu_{xy}.$$

この $\mathcal{E}(f, f)$ を用いて

$$H^2(X, \mu) = H^2 = \{f : X \to \mathbb{R} : \mathcal{E}(f, f) < \infty\}$$

と定義するとき, H^2 は $\|f\|_{H^2}^2 = \mathcal{E}(f, f) + f(0)^2$ の下でヒルベルト空間となる.

Definition 4.
$A \cap B = \phi$ をみたすような $A, B \subset X$ に対して, $R_{\mathrm{eff}}(A, B)$ を

$$R_{\mathrm{eff}}(A, B)^{-1} = \inf\{\mathcal{E}(f, f) : f \in H^2, f|_A = 1, f|_B = 0\}$$

により定義する. $R_{\mathrm{eff}}(A, B)$ を A と B の間の *effective resistance* と呼ぶ.

(X, μ) は無限 weighted graph とする. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $A_n \subset A_{n+1}, (n \in \mathbb{N})$ かつ $\bigcup_{n \geq 1} A_n = X$ を満たす族であるとし, $x_0 \in A_1$ とする. $R_{\mathrm{eff}}(x_0, A_n^c) \leq R_{\mathrm{eff}}(x_0, A_{n+1}^c)$ により, 次の極限が存在する:

$$R_{\mathrm{eff}}(x_0) = \lim_{n \to \infty} R_{\mathrm{eff}}(x_0, A_n^c).$$

この effective resistance を用いると, マルコフ連鎖の再帰性・非再帰性が次のように判定できる.

Theorem 5 ([1] Prop. 2.2.9)**.**
次の (i) ∼ (iii) は同値である :

(i) Y は再帰的である.

(ii) ある $x \in X$ に対して $R_{\mathrm{eff}}(x) = \infty$ である.

(iii) 任意の $x \in X$ に対して $R_{\mathrm{eff}}(x) = \infty$ である.

この証明には 任意の $x \in X$ に対して

$$\mathbb{P}^x(\sigma_x^+ = \infty) = (\mu_x R_{\mathrm{eff}}(x))^{-1}$$

が成り立つということを用いる.

先に述べた Pólya による証明では組み合わせを使って計算しているため, 特別なグラフでなければうまくいかず, また μ_{xy} が一様でないとうまくいかない. effective resistance によるマルコフ連鎖の再帰性･非再帰性の判定の利点は, μ_{xy} がこれによらず判定できることである. 例えば, レイリーの単調性定理 ([2] Th. 3.1.23) を用いると, 任意の $x, y \in X$ に対して $c_1 \mu'_{xy} \leq \mu_{xy} \leq c_2 \mu'_{xy}$ のとき $c_1 R_{\mathrm{eff}}(x) \leq R'_{\mathrm{eff}}(x) \leq c_2 R_{\mathrm{eff}}(x)$ が示せ, これを用いればシンプルランダムウォークが再帰的ならばこの場合も再帰的であることがわかる.

2.3 capacity による判定条件

マルコフ連鎖の再帰性･非再帰性の判定は capacity と呼ばれる量によっても可能である. このことについて述べる.

$C_0(X)$ は X 上の台が有限な関数全体とし, H_0^2 を $C_0(X) \subset H^2$ の閉包とする.

Definition 6.
有限集合 $B \subset X$ に対して, B の *capacity* を

$$\mathrm{Cap}(B) = \inf\{\mathcal{E}(f, f) : f \in H_0^2, f|_B = 1\}$$

により定義する.

capacity を用いると, マルコフ連鎖の再帰性・非再帰性は次のように判定できる.

Theorem 7 ([1] Prop. 2.2.13)**.**
次の (i) ∼ (iii) は同値である.

(i) Y は非再帰的である.

(ii) ある $x \in X$ に対して $\mathrm{Cap}(\{x\}) > 0$ である.

(iii) 任意の $x \in X$ に対して $\mathrm{Cap}(\{x\}) > 0$ である.

$x \in X$ に対して, 停止時刻 σ_x を次で定義する:

$$\sigma_x = \inf\{n > 0 : Y_n = x\}.$$

固定した $x \in X$ に対し, 関数 φ を $\varphi(z) = \mathbb{P}^z(\sigma_x < \infty)$ により定義する. このとき $\varphi \in H_0^2$ であって

$$\mathcal{E}(\varphi, \varphi) = (R_{\mathrm{eff}}(x))^{-1} = \mathrm{Cap}(\{x\})$$

が成り立つ. このことを用いて証明する.

参考文献

[1] Takashi Kumagai: Random walks on disordered media and their scaling limits, LNM 2102, Springer, 2014

[2] 熊谷隆: 確率論, 共立出版, 2003

[3] Richard Durret: Essentials of Stochastic Processes, Second Edition, Springer, 2012