P-7

e の無理数性および超越性について

Irrationality and transcendence of e

○加瀬 慎之助
Shinnosuke Kase[1]

Abstract

In the present article, we prove the irrationality and the transcendence of e. Our proof of the transcendence is essentially based on Hermite's idea, which uses the exponential series and the fact that an integer whose modulus is less than 1 must be 0.

1 The base of natural logarithms

自然対数の底 e は，

$$e = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \approx 2.718\cdots$$

で表され，様々な分野において現れる実数である．e は無理数および超越数であることが知られており，それぞれいくつかの証明が存在する．本稿ではそれらを紹介する．本稿において，$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ，自然数，整数，有理数，実数，複素数全体の集合を表すものとする．

2 Irrationality of e

Theorem1
e は無理数である．

Proof of Theorem1
e を有理数と仮定すると，$p, q \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$e = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} = \frac{p}{q}$$

と書ける．ここで両辺に $q!$ をかけると，

$$p(q-1)! = q! \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} + q! \sum_{n\geq q+1} \frac{1}{n!}$$

$$p(q-1)! - q! \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} = q! \sum_{n\geq q+1} \frac{1}{n!}$$

このとき，左辺は自然数である．一方で右辺は，

$$\begin{aligned} 0 < q! \sum_{n\geq q+1} \frac{1}{n!} &< \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{(q+1)^k} \\ &= \frac{1}{q} \leq 1 \end{aligned}$$

となる．これは矛盾．ゆえに，e は無理数である．■

連分数展開について関して知られている事実を用いても無理数性を示すことができる．e を連分数展開すると，

$$\begin{aligned} e &= [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, \ldots] \\ &= [2, \overline{1, 2m, 1}]_{m\geq 1} \end{aligned}$$

となることが知られているので，無理数性はその事実からも従うことにも注意しておこう．[1]

[1] 日大理工・院 (前)・数学

3 Transcendence of e

e の超越性は 1873 年に Hermite によって示された．まず超越性の定義を確認する．

Definition1
$\alpha \in \mathbb{C}$ が超越数であるとは，$P(\alpha) = 0$ を満たすような $P(X) \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ が存在しないときをいう．

α の超越性は $P(\alpha) = 0$ を満たす $P(X) \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ が存在したとして矛盾を導くことによって示される．ここで，係数は分母の最小公倍数をかけることで整数にできることにも注意しておく．Hermite による e の超越性の証明は，任意の自然数 k に対して $1, e, e^2, \ldots, e^k$ の組が $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立であることを示すものであった．

Theorem2
e は超越数である．

証明にあたり，記号を定義し 3 つの Lemma を用意する．

Definition2
$r = 0, 1, 2, \ldots$ と $x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\epsilon_r(x) = e^{-|x|} \sum_{k\in\mathbb{N}} \prod_{l=1}^{k} \frac{x}{r+l}$$

により，$\epsilon_r(x)$ を定義する．

Definition3
記号 h^r を，

$$h^0 = 1, \quad h^r = r! \ \ (r \geq 1)$$

により定める．また，$f(x) \in \mathbb{C}[x]$ を，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$$

としたとき，$f(h)$ を，

$$f(h) = \sum_{k=0}^{n} c_k h^k = \sum_{k=0}^{n} c_k r!$$

により定める．

Lemma1
すべての $x \in \mathbb{R}$ について $|\epsilon_r(x)| < 1$ である．

$f(x) = e^x$ のマクローリン展開から示すことができる．

Lemma2
$\phi(x)$ を任意の複素数係数多項式とし，

$$\phi(x)=\sum_{r=0}^{s}c_r x^r,\quad \psi(x)=\sum_{r=0}^{s}c_r\epsilon_r(x)x^r$$

とすると，

$$e^x\phi(h)=\phi(x+h)+\psi(x)e^{|x|}$$

となる．

Lemma3
$m\geq 2, f(x)$ を整数係数多項式とし，

$$F_1(x)=\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}f(x),\quad F_2(x)=\frac{x^m}{(m-1)!}f(x)$$

とすると，$F_1(h), F_2(h)$ は整数であり，

$$F_1(h)\equiv f(0),\quad F_2(h)\equiv 0 \pmod{m}$$

となる．

Proof of Lemma3
$f(x)$ は $\deg f=L$ とすると，$\{a_l\}_{l=0}^{L}\subset\mathbb{Z}$ を用いて，

$$f(x)=\sum_{l=0}^{L}a_l x^l$$

と書ける．このとき，

$$F_1(h)=\sum_{l=0}^{L}a_l\frac{h^{l+m-1}}{(m-1)!}=\sum_{l=0}^{L}a_l\frac{(l+m-1)!}{(m-1)!}$$

である．$l\geq 1$ の各項は m の倍数であるから，

$$F_1(h)\equiv a_0=f(0) \pmod{m}$$

となる．F_2 についても同様に示される．■

Lemma を用いて定理の証明をする．

Proof of Theorem2
主張が成立しないと仮定すると，$n\in\mathbb{N}$ と $\{C_i\}_{i=0}^{n}\subset\mathbb{Z}$ が存在して，

$$\sum_{t=0}^{n}C_t e^t=0 \tag{1}$$

と書ける．p を $\max(n,|C_0|)$ より大きい素数，$\phi(x)$ を，

$$\phi(x)=\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)\}^p$$

により定める．式 (1) の両辺に $\phi(x)$ をかけて Lemma2 を使うと，

$$\sum_{t=0}^{n}C_t\phi(t+h)+\sum_{t=0}^{n}C_t\psi(t)e^t=0$$

となり，左辺の 2 つの和ををそれぞれ S_1, S_2 とおけば，

$$S_1+S_2=0 \tag{2}$$

となる．ここで，Lemma3 において $m=p$ とすれば $\phi(h)$ は整数で，

$$\phi(h)\equiv(-1)^{np}(n!)^p \pmod{p}$$

となる．また，$1\leq t\leq n$ のとき，$f(x)\in\mathbb{Z}[x]$ を用いて，

$$\begin{aligned}\phi(t+x)&=\frac{(t+x)^{p-1}}{(p-1)!}\{(x+t-1)\cdots x\cdots(x+t-n)\}^p\\&=\frac{x^p}{(p-1)!}f(x)\end{aligned}$$

とかけるから，Lemma3 より $\phi(t+h)$ は p で割り切れる整数である．ゆえに，

$$S_1=\sum_{t=0}^{n}C_t\phi(t+h)\equiv(-1)^{np}C_0(n!)^p\not\equiv 0 \pmod{p}$$

となる．ここで，合同式の最後は p を $\max(n,|C_0|)$ よりも大きな素数としてとっていたことから従う．
したがって，S_1 は 0 でない整数であるから，

$$|S_1|\geq 1 \tag{3}$$

である．一方で，$|\epsilon_r(x)|<1$ とスターリングの公式から，

$$\begin{aligned}|\psi(t)|&<\sum_{r=0}^{s}|c_r|t^r\\&\leq\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\{(t+1)(t+2)\cdots(t+n)\}^p\\&\leq\frac{1}{n}\cdot\frac{(2^n n^{n+1})^p}{(p-1)!}\\&\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}en}\cdot\frac{(2^n n^{n+1}e)^{p-1}}{(p-1)^{\frac{2p-1}{2}}}\end{aligned}$$

ここで，$p\to\infty$ とすると右辺が 0 に収束する．よって，$S_2\to 0$ であるから，十分大きい p をとれば，

$$|S_2|<\frac{1}{2} \tag{4}$$

とできる．このとき，式 (2),(3),(4) から矛盾が生じるので，式 (1) を満たすような整数係数多項式は存在しない．つまり，e は超越数である．■

多項式列 $\{f_\nu(x)\}_{\nu=0}^{m}\subset\mathbb{Z}[x]$ を恒等式

$$\int_0^x e^{-t}f_\nu(t)dt\equiv\sum_{s=0}^{\deg f_\nu}f_\nu^{(s)}(0)-e^{-x}\sum_{s=0}^{\deg f_\nu}f_\nu^{(s)}(x)$$

および，$n,m\in\mathbb{N}$ と m にのみ依存する定数 c に対して，

$$f_\nu^{(i)}(0)=f_\nu^{(i)}(1)=\cdots=f_\nu^{(i)}(m)=0\quad(0\leq i<n)$$

$$\max_{0\leq t\leq m}|f_\nu(t)|\leq c^n$$

を満たすようにとる．この多項式を用いて e の超越性を示せることが知られている。[1]
多項式列の例として，

$$f_\nu(x)=\frac{(x(x-1)\cdots(x-m))^{n+1}}{x-\nu}\quad 0\leq\nu\leq m\ \text{(Hermite)}$$

$$f_\nu(x)=(x(x-1)\cdots(x-m))^n\cdot x^\nu\quad 0\leq\nu\leq m\ \text{(Weierstrass)}$$

などがあげられる。[1]

References

[1] Yu. V. Nesterenko, *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Volume 44, Number Theory IV, Springer, 1998.

[2] G.H. ハーディ·E.M. ライト, 数論入門 I, 丸善出版, 2012.