

交渉ゲームでの最適行動 Optimal Action in the Bargaining Game

松本 恭幸¹Yasuyuki Matsumoto¹

Abstract: In this talk, we axiomatize bargaining games between two players. We describe Nash's bargaining solution and Rubinstein's equilibrium for an alternating-offer game.

1 交渉解について

Definition 1

2 人のプレイヤーの交渉問題は、一般に次のように定式化できる。プレイヤー 1, 2 間の交渉問題は、実現可能集合 R と交渉の基準点 $u_0 = (u_0^1, u_0^2)$ の組 (R, u_0) で表現される。 R, u_0 に対して、以下を仮定する。

- (1) R : 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ におけるコンパクトで凸な集合。
- (2) $u_0 \in R$
- (3) $u^1 > u_0^1, u^2 > u_0^2$ となる $u = (u^1, u^2) \in R$ が存在する。

以下、上記の (1)~(3) の条件を全て満たす (R, u_0) を **交渉ゲーム** と呼び、交渉ゲームの全体を B で表す。

各交渉ゲーム (R, u_0) に対して、交渉の妥結点となるべき、2 次元の利得ベクトルを与える関数 $f: B \rightarrow \mathbb{R}^2$ のことを **交渉解** という。

ナッシュは、交渉解が満たすべき公理として、4 つの性質を提案した。まずはその準備をする。

Definition 2

$u_*^i < u^i$ ($i = 1, 2$) を満たす $u = (u^1, u^2) \in R$ が存在しない時、 u_* が R において **パレート最適** であるという。

Definition 3

交渉ゲーム (R, u_0) において、

1. $u = (u^1, u^2) \in R$ ならば $(u^2, u^1) \in R$
2. $u_0^1 = u_0^2$

が成り立つ時、この交渉ゲームは **対称** であるという。

【性質 1】 パレート最適性

任意の交渉ゲーム $(R, u_0) \in B$ に対して、 $f(R, u_0) = (f^1(R, u_0), f^2(R, u_0))$ が R においてパレート最適である時、交渉解 f は **パレート最適性** を満たすという。

【性質 2】 対称性

任意の交渉ゲーム $(R, u_0) \in B$ に対して、 (R, u_0) が対称であれば、 $f^1(R, u_0) = f^2(R, u_0)$ となる時、交渉解 f は **対称性** を満たすという。

【性質 3】 利得の正アフィン変換からの独立性

任意の交渉ゲーム $(R, u_0) \in B$ に対して、 α_i, β_i ($i = 1, 2$) は実数の定数であり、 $\alpha_i > 0$ として、新たな交渉ゲーム $(\tilde{R}, \tilde{u}_0)$ を次のように定義する。

$\tilde{R} = \{\tilde{u} = (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) | \tilde{u}^i = \alpha_i u^i + \beta_i \text{ (} i = 1, 2 \text{)}, u = (u^1, u^2) \in R\}$, $\tilde{u}_0^1 = \alpha_1 u_0^1 + \beta_1, \tilde{u}_0^2 = \alpha_2 u_0^2 + \beta_2$ 이며、任意の $(R, u_0) \in B$ および上記のようにして構成された $(\tilde{R}, \tilde{u}_0)$ に対して、

$$f^1(\tilde{R}, \tilde{u}_0) = \alpha_1 f^1(R, u_0) + \beta_1$$

$$f^2(\tilde{R}, \tilde{u}_0) = \alpha_2 f^2(R, u_0) + \beta_2$$

が成り立つならば、交渉解 f は、**利得の正アフィン変換からの独立性** を満たすという。

【性質 4】 無関係な結果からの独立性

任意の交渉ゲーム $(R, u_0) \in B$ に対して、 $u_0 \in T$ かつ $f(R, u_0) \in T$ を満たし、 (T, u_0) が交渉ゲームとなるような $T \subset R$ をとったらず、 $f(T, u_0) = f(R, u_0)$ となる時、交渉解 f は、**無関係な結果からの独立性** を満たすという。

ナッシュは、これら 4 つの性質に関し、次の結果を得た。

Theorem 4

パレート最適性、対称性、利得の正アフィン変換からの独立性、無関係な結果からの独立性の 4 つの性質を満たす交渉解 $f: B \rightarrow \mathbb{R}^2$ は唯一存在し、各交渉ゲーム $(R, u_0) \in B$ に対し、 $f(R, u_0)$ は、以下を達成する (u^1, u^2) となる。

$$\max \{(u^1 - u_0^1)(u^2 - u_0^2) | u = (u^1, u^2) \in R, u^1 \geq u_0^1, u^2 \geq u_0^2\} \quad (1)$$

証明の概略

【STEP1】(1) として f を定義すると、一意に定まることを示す。

【STEP2】STEP1 で定義される交渉解が、4 つの性質を満たすことを示す。

【STEP3】4 つの性質を満たす交渉解があるならば、それは STEP1 で定義されたものになることを示す。

2 無限回続く可能性を含めた提案応答ゲームについて

X を全てのプレイヤーの戦略の集合とする。 x_*^{-i} を i 以外のプレイヤーの戦略の組とする。戦略形 n 人ゲームに

¹日大理工・院 (前)・数学

において全てのプレイヤー $i (= 1, \dots, n)$ に対して,

$$f^i(x_*) \geq f^i(x^i, x_*^{-i}) \quad \forall x^i \in X^i$$

を満たす時、戦略の組 $x_* = (x_*^i, x_*^{-i})$ は**ナッシュ均衡**である。

展開形ゲーム: ゲームの木から構成されるゲームで、ゲームの木、プレイヤー分割、偶然手番の確率分布族、情報分割、利得関数の 5 つの要素からなる。

部分ゲーム: 展開形ゲーム Γ の各構成要素を部分木に制限したゲーム。

※ Γ 自身も Γ の部分ゲームに含まれる。

戦略 b_* が Γ の全ての部分ゲームでその部分ゲームのナッシュ均衡を導く時、 b_* は**部分ゲーム完全均衡**である。以下のような、2 人のプレイヤーが交互に分配案を提示する動的なゲームを**提案応答ゲーム**といい、このゲームの長さは無限にあるものとする。

(1) 奇数ラウンド (1, 3, ...)

プレイヤー 1 は分配案 x を 2 に提示し、プレイヤー 2 は x に対して A(受け入れる) か R(拒否する) かを選択する。プレイヤー 2 が A を選択すればゲームが終了して x が合意され、R を選択すれば交渉は次のラウンドへ進む。

(2) 偶数ラウンド (2, 4, ...)

プレイヤー 2 は分配案 y を 1 に提示し、プレイヤー 1 は y に対して A(受け入れる) か R(拒否する) かを選択する。プレイヤー 1 が A を選択すればゲームが終了して y が合意され、R を選択すれば交渉は次のラウンドへ進む。

ただし、合意が実現されなければ、2 人の分配額はともに 0 である。

Theorem 5

$x^1 + x^2 = 1$ を満たすような任意の分配 $x = (x^1, x^2)$ に対して、提案応答ゲーム Γ のナッシュ均衡点 $\sigma_* = (\sigma_*^1, \sigma_*^2)$ が存在して、 $w(\sigma_*) = (x, 1)$ である。

※ (z, t) : ラウンド t で分配 z が合意される時の結果。

$w(\sigma_*)$: 戦略の組 σ_* に対するゲームの結果。

証明／

プレイヤー $i (= 1, 2)$ の戦略 σ^i を、次のように定義する。

(1) 分配 x を提案する。

(2) 相手の提案に対し、 $y^i \geq x^i$ ならば y に対して

A を選択し、 $y^i < x^i$ ならば R を選択する。

定義に従うと σ の結果は $(x, 1)$ である。仮に 1 が σ^1 を離脱しても、2 が σ^2 に従う以上、 x^2 よりも大きいものが提示されて 2 が A をとる (このとき、1 の取り分は x^1 より少ない) か、合意が実現しないである。いずれにせよ、プレイヤー 1 の利得が x^1 より増加することはないので、離脱する理由がない。同様にプレイヤー 2 が σ^2 を離脱しても利得は x^2 より増加しない。■

ルービンシュタインは、提案応答ゲームの部分ゲーム完全均衡が唯一存在し、プレイヤー i の将来利得に対する割引因子 δ_i が 1 に収束する時、その利得がナッシュ交渉解に収束することを以下の定理で示した。

Theorem 6

$0 < \delta_1 < 1$, $0 < \delta_2 < 1$ とする。提案応答ゲーム Γ は、次のような唯一の部分ゲーム完全均衡 $\sigma_* = (\sigma_*^1, \sigma_*^2)$ を持つ。

(1) プレイヤー 1 は $x_* = (x_*^1, x_*^2)$ を提案し、次のラウンドでプレイヤー 2 は $y_* = (y_*^1, y_*^2)$ を提案する。

ただし、 x_* と y_* は、以下の式を満たす。

$$y_*^1 = \delta_1 x_*^1, \quad x_*^2 = \delta_2 y_*^2, \quad x_*^1 + x_*^2 = 1, \quad y_*^1 + y_*^2 = 1 \quad (**)$$

(2) プレイヤー 1 はプレイヤー 2 の任意の提案 $y = (y^1, y^2)$ に対して、 $y^1 \geq y_*^1$ ならば A(受け入れる)、それ以外では R(拒否する) を選択する。

同様に 2 は 1 の任意の提案 $x = (x^1, x^2)$ に対して、 $x^2 \geq x_*^2$ ならば A、それ以外では R を選択する。

証明／

上の定理の主張のうち、戦略の組 σ_* が部分ゲーム完全均衡であることのみ示す。第 l ラウンドでの 1 の提案から始まる部分ゲーム Γ_l に σ_* がナッシュ均衡を導くことを示す。部分ゲーム Γ_l の最初の第 l ラウンドで 1 が x_* を提案する。 σ_* に従うと、1 の提案 x_* に対して 2 は A をとる。仮に 2 が第 l ラウンドで σ_*^2 を離脱して 1 の提案 x_* に対して R をとっても、プレイヤー 1 が σ_*^1 に従う以上、次ラウンド以降でいずれかのプレイヤーの提案が A をとるようなものは、 x_* または y ($y^1 \geq y_*^1$, つまり $y^2 \leq y_*^2$) である。 $x_*^2 = \delta_2 y_*^2 < y_*^2$ より、離脱した時の 2 の最大利得は $\delta_2^l y_*^2 = \delta_2^{l-1} x_*^2$ である。よって 2 の利得が $\delta_2^{l-1} x_*^2$ より増加することはないことから、2 が第 l ラウンドで σ_*^2 を離脱するメリットがない。1 が離脱した場合も同様にいえる。以上より、 σ_* は部分ゲーム Γ_l にナッシュ均衡を導く。偶数ラウンドでの 2 の提案から始まる部分ゲームについても同様。特に、割引因子 δ_1, δ_2 が限りなく 1 に近づく時、

(**) より提案は $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ に収束する。

参考文献

- [1] 岡田 章 (2011), 『ゲーム理論 新版』, 有斐閣。
- [2] 武藤 滋夫 (2011), 『ゲーム理論』, 株式会社オーム社