P-9

Birkoff の Multiple Recurrence 定理を用いた van der Waerden の定理の導出
Derivation of van der Waerden's Theorem from Multiple Birkoff Recurrence

○藤枝昭祐 [1]
*Akihiro Fujieda [1]

Abstract: Van der Wearden's theorem says that whenever $\mathbb{N}$ is partitioned into finitely many sets, one of these sets contains arithmetic progressions of arbitarary lengths. In this talk, we derive this theorem from topological dynamics, via the Multiple Birkoff Recurrence Theorem.

まずはじめに, 一般の距離空間内での recurrent point の定義と主定理の証明で用いる Multiple Birkoff Recurrence 定理を導入する.

Definition 1.
(X, d) が距離空間であるとき, $\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0$ に対して
$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$
を x を中心とする半径 ε の球体とする.

Definition 2.
X が距離空間であり, T を X から X への自己写像とする. また, $T^n = \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{n}$ と書く.
このとき, $\exists n_k \longrightarrow \infty$ $s.t.$ $T^{n_k}x \longrightarrow x$ となるとき, x は T の ***recurrent point*** であるという.

Definition 3.
$\forall x \in X$ に対し, $\overline{\mathcal{O}}_T(x) = \overline{\{T^n x\ : n \geq 1\}}$
を x の ***forword orbit closure*** という.

Proposition 4.
$x \in \overline{\mathcal{O}}_T(x)$ であることと x が recurrent point であることは同値である.

Definition 5.
X を距離空間とし, $T_1,\ T_2, \cdots,\ T_\ell$を X から X への写像とする. $x_0 \in X$ に対し, $\exists n_k \longrightarrow \infty$ $s.t.$
$T_1^{n_k}x_0 \longrightarrow x_0,\ T_2^{n_k}x_0 \longrightarrow x_0, \cdots,\ T_\ell^{n_k}x_0 \longrightarrow x_0$ を満たすとき, x_0 を $T_1,\ T_2, \cdots,\ T_\ell$ の ***multiply recurrent point*** という.

Theorem 6. (Multiple Birkoff Recurrence)
X をコンパクト距離空間, $T_1,\ T_2, \cdots,\ T_\ell$ を X からX への連続な自己写像で, どの二つも可換であるとする.
このとき, X には multiply recurrent point が存在する.

次に Λ をコンパクト距離空間, $\Omega = \Lambda^{\mathbb{N}}$ とする. Λ が有限集合のときには Λ に離散距離を入れる.

Definition 7.
Ω 内の shift T を次のように定義する.
$T : \Omega \longrightarrow \Omega$, $(T\omega)(n) = \omega(n+1)$

[1]日大理工・院 (前)・数学

つまりこの shift を m 回合成した場合は ω の各点 $\omega(n)$ を m 回 shift した点になるので $(T^m\omega)(n) = \omega(n+m)$ となる.

Definition 8.
Ω 上の距離を次のように定義する.
$D(\omega, \omega') = \inf\left\{\dfrac{1}{k+1} \mid \omega(i) = \omega'(i)\ for\ |i| < k\right\}$.
この $D(\cdot, \cdot)$ は距離の公理を満たす.

Proposition 9.
Ω 内の shift T は連続である.

Proposition 10.
$\alpha \in \Omega$ とする. 任意の自然数 r に対し, $\beta \in B_\varepsilon(\alpha)$
ならば $\alpha(1) = \beta(1),\ \alpha(2) = \beta(2), \ldots,\ \alpha(r) = \beta(r)$
を満たすような正の数 ε が存在する.

ここで, 組み合わせ論の定理である van der Waerden の定理を紹介し, Ω 上で MBR を使った証明を行う.

Theorem 11. (van der Waerden)
自然数 $\mathbb{N}$ を有限個に分割する : $\mathbb{N} = B_1 \amalg B_2 \amalg \cdots \amalg B_q$.
このとき, ある B_j には任意の長さの等差数列が入る.

Proof of Theorem 11, *Using Theorem* 6.
$\Omega = \{1, 2, \ldots, q\}^{\mathbb{N}},\ \omega \in \Omega$ を $\omega(n) = (n \in B_i$をみたす $i)$ と定義する. T をΩ 内の shift とする.
$X = \overline{\mathcal{O}}_T(\omega)$ はコンパクト距離空間であり, $T_1 = T,\ T_2 = T^2, \ldots, T_\ell = T^\ell$ とすると, MBR(Theorem 6.) より
$\exists \eta \in X,\ \exists n_k \longrightarrow \infty,\ T_i^{n_k}\eta \longrightarrow \eta\ \ (\forall i) \cdots (*)$
ここで Proposition 10. を $r = 1$ に使うことで得られる ε に対し, $(*)$ を使うと, $\exists k$ $s.t.$ $T_1^{n_k}\eta, \ldots, T_\ell^{n_k}\eta \in B_\varepsilon(\eta)$.
つまり $T_1^{n_k}\eta(1) = \cdots = T_\ell^{n_k}\eta(1) = \eta(1)$.
$T_i^{n_k}\eta(1)$ は $\eta(1)$ を in_k 回 shift した点なので
$\eta(1+n_k) = \eta(1+2n_k) = \cdots = \eta(1+\ell n_k) = \eta(1) \cdots (**)$
また, Proposition 10. より $\eta' \in B_{\varepsilon'}(\eta) \Rightarrow \eta'(1) = \eta(1),\ \eta'(2+n_k) = \eta(2+n_k), \cdots, \eta'(1+\ell n_k) = \eta(1+\ell n_k)$
となる ε' が存在する.
また, $\eta \in X = \overline{\mathcal{O}}_T(\omega) = \overline{\{T\omega,\ T^2\omega, \ldots\}}$ なので,
$B_{\varepsilon'}(\eta) \cap \{T\omega,\ T^2\omega, \ldots\} \neq \emptyset$　つまりある $m \geq 1$ に対して $T^m\omega \in B_{\varepsilon'}(\eta)$.

したがって, $T^m\omega$とηの最初の $1+\ell n_k$ 個が一致, つまり $\omega(1+m)=\eta(1),\ \omega(1+n_k+m)=\eta(1+n_k),\cdots,$ $\omega(1+\ell n_k+m)=\eta(1+\ell n_k)\cdots(***)$
$(**)$ と $(***)$ を組み合わせると
$\therefore \omega(1+m)=\omega(1+n_k+m)=\cdots=\omega(1+\ell n_k+m)$
よって $1+m,\ 1+m+n_k,\ \ldots, 1+m+\ell n_k$ はすべてある B_i に入るので, B_i に長さ ℓ の等差数列が入ることが分かった. ここで ℓ の候補は無限個あるが, B_iの候補は q 個. 鳩の巣の原理より, ある一つの B_j には無限個の ℓ が対応する. よって, その B_j には任意の長さの等差数列が入る. □

Theorem 12. (有限版 van der Waerden の定理)
任意の自然数 q,ℓ に対して, ある自然数 $N(q,\ell)$ が存在して, $\{1,\cdots,N(q,\ell)\}$ のどんな分割 $B_1 \amalg B_2 \amalg \cdots \amalg B_q$ に対しても, その中のある B_j には長さ ℓ の等差数列が入る.

Proof of Theorem 12.
(背理法) どんな $N=N(q,\ell)$ に対しても $\{1,\cdots,N\}$ の分割 $B_{N,1} \amalg B_{N,2} \amalg \cdots \amalg B_{N,q} \cdots (*)$
が存在し, どの $B_{N,j}$ にも長さ ℓ の等差数列が入らないと仮定する. $(*)$ に対応する $\{1,2,\cdots,q\}^{[1,N]}$ の点 η_N をとる. $[1,N]$ の区間の外側の点をすべて 1 に対応させることによって, η_N を $\{1,2,\cdots,q\}^{\mathbb{N}}$ の点としてみることができる. $\Omega=\{1,2,\cdots,q\}^{\mathbb{N}}$ とするとこの Ω はコンパクト距離空間なので, ある数列 N_k に対して $\eta_{N_k} \longrightarrow \eta \in \Omega$ となる η が存在する. ここで, η に対応する分割を $B_1 \amalg B_2 \amalg \cdots \amalg B_q$ とすると VDW(Theorem 11.) より, ある分割 B_i には任意の長さの等差数列が入るので, この η に長さ ℓ の等差数列が入る: $\eta(n)=\eta(n+d)=\cdots=\eta(n+(\ell-1)d)=i$.
また, Proposition10. より $\omega \in B_\varepsilon(\eta)$ ならば
$\eta(n)=\omega(n),\ \eta(n+d)=\omega(n+d),\cdots,\ \eta(n+(\ell-1)d)=\omega(n+(\ell-1)d)$ となる ε が存在する. ここで $\eta_{N_k} \longrightarrow \eta$ であることから, $\eta_{N_k} \in B_\varepsilon(\eta)$ であり, かつ $[1,N_k] \supset [n,n+(\ell-1)d]$ となるような N_k を見つけることができる. すると, $[n,n+(\ell-1)d]$ の範囲で $\eta_{N_k}=\eta$ であるから, $B_{N_k,i}$ に長さ ℓ の等差数列が入ることになり矛盾する. □

Definition 13. (van der Waerden Number)
Theorem 12 において与えられた分割の数 q と等差数列の長さ ℓ に対して定まる $N(q,\ell)$ の最小の値を ***van der Waerden Number*** といい $W(q,\ell)$ で表す.

具体的な例として分割数 $q=2$, 等差数列の長さ $\ell=3$ の場合を考える. 1〜8 までの数を二つに分けるとする. まず 1 と 2 が同じ組だとすると 3 は違う組となる. このとき, 4 が 1 と同じ組だとする.
(a) 5 を 1 と同じ組に入れた場合, 6 が同じ組に入れられないので $(1,2,4,5)$ と $(3,6)$ の組となるが, このとき 7 と 8 がどちらの組にも入らなくなる. (b) 5 を 1 と違う組に入れた時, 7 がどちらの組にも入らない. よって (a),(b) どちらも矛盾するので, 4 は 1 と違う組に入る. それにより $(1,2,5),\ (3,4)$ と分かれる. $(1,2,5),(3,4,6)$ とすると 8 がどちらにも入らない. よって $(1,2,5,6),\ (3,4,7,8)$ の場合のみどちらにも等差数列が入らない.
次に 1 と 2 が違う組であり, 3 が 1 と同じであるとする. (a) 4 が 1,3 と同じ組に入るとき, 5,7 は 2 と同じ組に入る. すると 6 は 1 と同じ組に入るが, 8 がどちらにも入らなくなる. (b) 4 が 2 と同じ組に入るとき, $(1,3,6)$ と $(2,4,5)$ と分かれる. すると 8 は 1 と同じ組に入るので (1,3,6,8) と (2,4,5,7) のみとなる.
次に 2 と 3 が同じ組になるとき, $(1,4,5),\ (2,3,7)$ となる. また連続した 3 つの数は同じ組に入れないので, $(1,2,5,8),\ (2,3,6,7)$ の場合のみどちらにも等差数列が入らない. よって 1〜8 までの数は三つの分け方を得られる.
しかし, 1〜9 までの数を 2 つに分けようとすると, 9 は上の 3 つの分け方のいずれの組にも入らないことが分かる. よって $W(2,3)=9$ となる.
van der Waerden Number は具体的な数では次のような数が求められているが, ほとんどの q,ℓ に対してはまだ未解決である.

q	2	2	2	2	3	3	4
ℓ	3	4	5	6	3	4	3
$W(q,\ell)$	9	35	178	1132	27	293	76

Theorem 14. (Gowers, Berlekamp)
任意の自然数 $q,\ \ell$ に対し, 次の式をみたす.

$$W(q,\ell) \le 2^{2^{q^{2^{2^{\ell+9}}}}} \qquad \text{(Gowers)}$$

また $q=2,\ \ell=p+1$ (p : 素数) のとき, 次の式を満たす.

$$W(2,p+1) \ge p\cdot 2^p \quad \text{(Berlekamp)}$$

Conjecture 15 (Graham)**.**
$q=2$ のとき, 任意の自然数 ℓ に対し, 次の式を満たす.

$$W(2,\ell) \le 2^{\ell^2}$$

参考文献

[1] H. Furstenberg, *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1981, M. B. Porter Lectures.

[2] Ron Graham and Steve Butler, *Rudiments of Ramsey theory*, second ed., CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 123, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.