E-7

システム同定理論の研究
—付加時系列データ数可変な逐次部分空間同定法—

Reserch of System Identification Algorithm

—Recursive Subspace Identification Method via Variable Number of Additional Time-Series Data—

○沼田崚太 *　　井上健 †
Ryota Numata　　Tsuyoshi Inoue

Abstract : This paper proposes a recursive subspace identification method in which a number of additional time-series data is not restricted to one and can be set to a variable value. This paper points out that the proposed method is helpful through a numerical example.

1　緒言

逐次部分空間同定法は適応制御則への適用，システムの動特性の変化検出など様々な分野への応用が期待される有力な同定法である [1, 2]．従来の同定アルゴリズムは部分空間同定を行う際の演算である特異値分解の逐次化を行っている．逐次同定アルゴリズムではこれらの行列分解の逐次化と同時にデータ行列の更新も行うが，文献 [1], [2] では更新データ行列のサイズを任意に設定することが出来ず，その列数は必ず 1 に固定されている．この逐次同定アルゴリズの計算量をさらに軽減するために，本研究ではデータ行列のサイズをユーザーが任意に設定できる方法を提案する．4 節では線形時不変（LTI）システムに対して提案方法による部分空間同定を行うことでその有効性を示す．**表記：**　本稿では $\mathbb{R}^{m\times n}$ は $m\times n$ の実数行列の集合を表し，I は適切な次元を持った単位行列とする．また，行列 M に対し M^T は M の転置行列を表す．$\Pi_M^\perp$ は $\Pi_M^\perp\in\mathbb{R}^{n\times(n-r)}$ で $r=\operatorname{rank}M$ を満たし，$M\Pi_M^\perp=0$ となる直交射影行列 $\Pi_M^\perp=I-M^T\left(MM^T\right)^{-1}M$ を表す．

2　基礎結果

まず，本論文の基礎結果である次の補題を述べる．

補題 1　行列 $U_{N+s}\in\mathbb{R}^{mr\times(N+s)}$，$Y_{N+s}\in\mathbb{R}^{pr\times(N+s)}$ $\mathcal{U}_s\in\mathbb{R}^{mr\times(s)}$，$\mathcal{Y}_s\in\mathbb{R}^{pr\times(s)}$ が

$$U_{N+s}=\begin{bmatrix}U_N & \mathcal{U}_s\end{bmatrix},\quad Y_{N+s}=\begin{bmatrix}Y_N & \mathcal{Y}_s\end{bmatrix}\tag{1}$$

のように与えられているとする．

$$P_N:=\left(U_NU_N^T\right)^{-1},\qquad \alpha_N:=\left(I+\mathcal{U}_s^TP_N\mathcal{U}_s\right)^{-1},$$
$$e_N:=\mathcal{Y}_s-Y_NU_N^TP_N\mathcal{U}_s$$

を定義する．このとき，以下が成立する．

$$Y_{N+s}\Pi_{U_{N+s}}^\perp Y_{N+s}^T=Y_N\Pi_{U_N}^\perp Y_N^T+e_N\alpha_Ne_N^T\tag{2}$$

3　問題設定

雑音を無視できると仮定し，未知の線形離散システムが次の状態空間表現

$$\begin{aligned}x_{k+1}&=Ax_k+Bu_k\\ y_k&=Cx_k+Du_k\end{aligned}$$

で表されるとする．ただし，$x_k\in\mathbb{R}^n$，$u_k\in\mathbb{R}^m$，$y_k\in\mathbb{R}^p$ とする．行列 A，B，C，D はそれぞれふさわしい次元をもった行列である．行列 A は安定であるとし，$(A,\ C)$ は可観測であると仮定する．$r\geq n+1$ を満たす整数 r と入力列 $\{u_k\}$ とある正の整数 N_0 に対して，ある時刻 k において

$$\sum_{j=r}^{N_0}u_r\left(k+j\right)u_r\left(k+j\right)^T$$

が正則であるとする．正の整数 N はデータ数を表し，$N\geq N_0$ とする．問題は未知の行列 $(A,\ B,\ C,\ D)$ を逐次的に推定し，かつデータ行列のサイズを任意に設定できるアルゴリズムを構築することである．

4　逐次部分空間同定法

一般的な部分空間同定法ではシステムの入出力方程式に対して，入力データ行列 U の直交射影行列 $\Pi_U^\perp$ を乗じることで入力データ行列の部分空間へ直交射影を行う．その後，特異値分解を行うことにより次のような拡大可観測行列 Γ のシフト不変性から未知の行列 A，C を導出する．

$$\Gamma=\begin{bmatrix}CA\\ CA^2\\ \vdots\\ CA^r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ \vdots\\ CA^{r-1}\end{bmatrix}A\tag{3}$$

* 日本大学大学院理工学研究科 精密機械工学専攻
† 日本大学大学院理工学研究科 精密機械工学専攻 准教授

そして，拡大可観測性行列のシフト不変性から導出された行列 A, C および特異値分解

$$Y\Pi_U^{\perp} = \begin{bmatrix} E_n & E_n^{\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_n & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_n \\ F_n^{\perp} \end{bmatrix}$$
$$= E_n S_n F_n^{\perp}$$

より導出される行列 E_n を用いることで次のような下三角テプリッツ行列 H_r より未知の行列 B, D を求める．

$$H_r = \begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \ddots & \vdots \\ CAB & CB & D & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ CA^{r-2}B & CA^{r-3}B & \cdots & CB & D \end{bmatrix}$$

部分空間同定法では以上のように未知の行列 A, B, C, D を導出するが，例えば文献 [1] の逐次部分空間同定法では式 (8) を次のように次元がデータ数に依存しない行列へ変換を行う．

$$\left(Y\Pi_U^{\perp}\right)\left(Y\Pi_U^{\perp}\right)^T = Y\Pi_U^{\perp}Y^T = E_n S_n^2 E_n^T \tag{4}$$

さらに，U_{N+s} の直交射影行列中の行列 $\left(U_{N+s}U_{N+s}^T\right)^{-1}$ に対し逆行列補題を適用し，$Y_{N+s}\Pi_{U_{N+s}}^{\perp}Y_{N+s}^T$ および $Y_N\Pi_{U_N}^{\perp}Y_N^T$ の関係式を導出することで逐次アルゴリズムを取得している．したがって，補題において行列 U_N, $\mathcal{U}_s$, Y_N, $\mathcal{Y}_s$ をそれぞれ次のようなデータ行列

$$U_N = \begin{bmatrix} u_{k+1} & \cdots & u_{k+N-r+1} \\ u_{k+2} & \cdots & u_{k+N-r+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{k+r} & \cdots & u_{k+N} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mr\times(N-r+1)} \tag{5}$$

$$\mathcal{U}_s = \begin{bmatrix} u_{k+N-r+2} & \cdots & u_{k+N-r+s+1} \\ u_{k+N-r+3} & \cdots & u_{k+N-r+s+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{k+N+1} & \cdots & u_{k+N+s} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mr\times s} \tag{6}$$

$$Y_N = \begin{bmatrix} y_{k+1} & \cdots & y_{k+N-r+1} \\ y_{k+2} & \cdots & y_{k+N-r+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{k+r} & \cdots & y_{k+N} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pr\times(N-r+1)} \tag{7}$$

$$\mathcal{Y}_s = \begin{bmatrix} y_{k+N-r+2} & \cdots & y_{k+N-r+s+1} \\ y_{k+N-r+3} & \cdots & y_{k+N-r+s+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{k+N+1} & \cdots & y_{k+N+s} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mr\times s} \tag{8}$$

で定義すれば，次のようなデータ行列のサイズが任意に設定可能な逐次部分空間同定アルゴリズムを導出できる．

[Algorithm]

次の手順に従い逐次同定を行う．

1.　$N = 0$ に設定し，入出力データを用いて式 (5)，(7) により U_N，Y_N を構築する．

2.　$mr \leq N - r + 1$ を満たす任意の定数 r ，s を設定し，式 (1)，(6)，(8) により $\mathcal{U}_s$, $\mathcal{Y}_s$, U_{N+s}, Y_{N+s} を構築し，直交射影行列 $\Pi_{U_N}^{\perp}, \Pi_{\mathcal{U}_s}^{\perp}$ を求める．

3.　式 (4) より E_n を求め，式 (3) 他より状態方程式の各係数 A，B，C，D を求める．

4.　式 (1) により $Y_{N+s}\Pi_{U_{N+s}}^{\perp}Y_{N+s}^T$ を逐次更新し，$N := N + s$，$U_N := U_{N+s}$，$Y_N := Y_{N+s}$ を行い，**2.** へ戻る．

5　数値例

補題の有効性を示すために以下の数値例を用いてシミュレーションを行った．シミュレーションではデータ数 N=100，任意の設計変数 s=10 とする．また，同定対象は以下の状態空間表現で表される 2 入力 2 出力 3 状態線形離散システムとする．Figure1 に同定結果を示す．

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.6 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} u_k$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_k$$

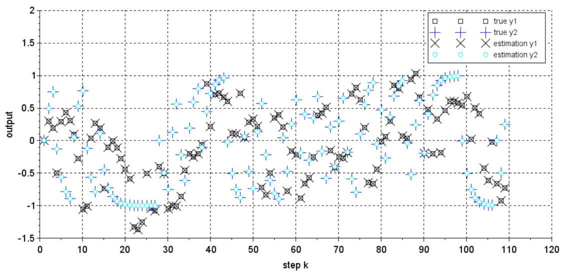

Figure1　Estimated output by the proposed algorithm

Figure1 から分かるように，真の出力 (true y1，true y2) および逐次同定により推定された出力 (estimation y1，estimation y2) は完全に一致しているので，LTI システムに対しては補題を用いたシステム同定の精度が高いことが確認できる．

6　結言

本研究では，逐次部分空間同定法において，同定計算で付加される時系列データ数を 1 に限定する必要のない方法を提案し，シミュレーションによりその有効性を示した．

参考文献

[1] 奥宏史，木村英紀：部分空間同定法の逐次化について；計測自動制御学会論文集，35-6，800/805(1999)

[2] 奥宏史：逐次部分空間同定を使った変化検出法；システム制御情報学会論文誌，Vol.17，No.11，pp.506-513，(2004)

[3] 和田清：部分空間同定法って何？；計測と制御，第 36 巻，pp.569-574，1997 年 8 月号