

画像解析を用いた有限歪の計測に関する研究
(ゴムの大変形振り下の剪断歪の分布について)

Study on Finite Strain Measurements using Image Analysis
(Distribution of Shear Strain in Rubber under Large Torsion)

○吉村 拓¹, 加藤 保之²

Taku YOSHIMURA¹, Yasuyuki KATO²

Abstract: The purpose of this study is to elucidate the effectiveness of the image analysis based on the Natural Strain theory. In this study, focusing on the torsional deformation of the rubber shaft, which has rectangular cross section, the shearing strain on the surface of test piece is investigated based on the image analysis suggested in this study. And the distributions of shear strain along the cross section, which are generated under large shear deformation, are revealed. Then, these distributions are compared with the results based on the conventional torsional theory.

1. 緒言

本研究の目的は、自然歪理論に基づく本画像解析の妥当性を明らかにしていくことである。円形断面以外の一般断面形状の棒部材の振りに関しては、ワーピング(warping)を考慮する必要があり、これはサンブナン(Saint Venant)の振り理論として一般によく知られている。しかし、この振り理論は、微小変形である事を仮定した理論であり、有限変形(大変形)下で成立する理論ではない。一方で、有限変形であることを考慮した超弾性体(hyperelastic body)の理論としては、歪エネルギー密度関数を導入した Mooney-Rivlin らのモデルが広く数値解析で用いられている。しかし、ワーピングを考慮しなければならない一般断面形状の大変形の振りについては、あまり研究が行われていない。

そこで本研究では、超弾性体であるゴムを研究対象に選び、ワーピングが生じる正方形断面の棒の振りに着目して、大きな剪断変形を加えた際に試験片の表面に生じる歪を本研究の画像解析手法に基づき調査する。

2. 歪の算出方法

本研究では、試験片の表面に描いた 3 本の線素から変形勾配の各成分を求め、極分解により変形の主値とその方位を算出し、主歪、剛体回転、ならびに剪断歪を求める。図 1 は、水平軸からそれぞれ β_{oa} , β_{ob} , β_{oc} の方位に存在する 3 本の線素 l_{oa} , l_{ob} , l_{oc} が変形を受けて、 β_a , β_b , β_c の方位に回転し、線素 l_a , l_b , l_c に変化した状態を表わしている。これらの線素の変形前後の関係から変形勾配の対角成分 D_{11} , D_{22} ならびに剪断成分 D_{12} , D_{21} が得られる(誘導過程は紙面の都合上省略する)。更に、これらの変形勾配を極分解することで、変形の主値 λ_1 , 主歪 ϵ_1 , その主軸の方位 θ_m , 主軸線素の変形前の方位 θ_o , ならびに剛体回転 θ_R は、以下のように表される。

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{(D_{11} + D_{22})^2 + (D_{12} - D_{21})^2} + \sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + (D_{12} + D_{21})^2}}{2} \quad (1)$$

$$\epsilon_1 = \ln \lambda_1 \quad (2)$$

$$\theta_m = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \tan^{-1} \left\{ \frac{D_{11}^2 + D_{12}^2 - D_{21}^2 - D_{22}^2}{2(D_{11}D_{21} + D_{12}D_{22})} \right\} \quad (3)$$

$$\theta_o = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \tan^{-1} \left\{ \frac{D_{11}^2 - D_{12}^2 + D_{21}^2 - D_{22}^2}{2(D_{11}D_{12} + D_{21}D_{22})} \right\} \quad (4)$$

$$\theta_R = \theta_o - \theta_m \quad (5)$$

また、鉛直方向の線素 l_{oc} の剪断歪 γ は、変形前後の回転角から剛体回転 θ_R を取り除いて表され、次式のようになる。

$$\gamma = \beta_{oc} - \beta_c - \theta_R \quad (6)$$

但し、変形前後の線素の方位は、以下のように表される。

$$\beta_{oc} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left\{ \frac{dX_c}{dY_c} \right\} \quad (7)$$

$$\beta_c = \tan^{-1} \left\{ \frac{dy_c}{dx_c} \right\} = \tan^{-1} \left\{ \frac{D_{21} dX_c + D_{22} dY_c}{D_{11} dX_c + D_{12} dY_c} \right\} \quad (8)$$

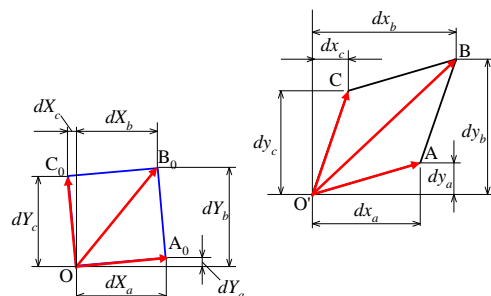


Fig.1 Line elements

3. 実験方法

軸方向変位と剪断変位を同時に作用できる多軸負荷試験機を用いて実験を行う。また、画像の測定に使用したカメラは、Canon 製の高画素カメラ(最大有効画素 5060 万画素)であり、同一微小要素の刻々の変化を測定するために、カメラは回転移動させながら測定を行う(2台のカメラを使用し、各要素の測定を行う際には、上下左右に移動させて画像の測定を行う)。

次に、実験方法について説明する。試験片の材質は、天然ゴム(硬度 Hs=65)であり、図 2 に示すように正方形断面(一

1: 日大理工・学部・機械, 2: 日大理工・教員・機械

辺の長さ 14 [mm], 標点間距離 40 [mm]) の試験片を用いる。

また、試験片の表面には、図 3 に示すように画像の測定のために予め等間隔 (2.0 [mm]) の格子状の罫書き線を描き、試験片を試験機に装着した後に軸方向変位を拘束した状態のまま、トルクを加える。ただし、加える最大捩れ角を 3 段階 (捩れ角 $\varphi_{deg} = 135, 225, 315$ [deg]) に設定して画像の測定を行う。ここでの画像の測定は、この図に示すように、試験片の中央部から 16 [mm] 離れた上部までの計 8 カ所の微小要素 ($N=0 \sim 7$) と、上部 ($N=7$) と中央部 ($N=0$) の断面に対して 7 カ所の微小要素 (a ~ g) について行う。これらの測定した画像から微小要素の 4 点の座標位置 OABC を測定し、自然歪理論に基づき、前述した主歪 ε_1 、剛体回転 θ_r 、鉛直方向の線素 l_{oc} の剪断歪 γ 等の諸量を求める。

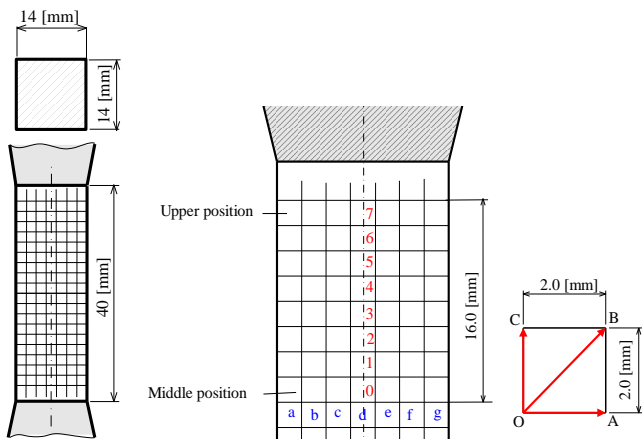


Fig.2 Test piece

Fig.3 Position of small elements

4. 実験結果

4.1 上部と中央部の画像の測定結果の比較について

上部 ($N=7$) と中央部 ($N=0$) の画像より得られた測定結果を、剪断歪が最大である図 3 の要素 d に対して比較することで、局部変形の発達状況を調べることにする。図 4 (a) に剪断応力 τ と剪断歪 γ の関係を示す。ここで、この図中の A は、捩れ角 $\varphi_{deg} = 135$ [deg] の状態を、B は、225 [deg]、C は、315 [deg] の結果をそれぞれ示しており、緑色のプロットが上部、赤色のプロットが中央部の画像から得られた測定結果である。捩れ角が A の状態では、赤色のプロット (□) の歪は、緑色のプロット (□) の歪よりも大きく発生していることから、中央部の変形が先行していることが確認できる。また、図中の黒色のプロット (●) は試験機の回転角より得られた結果であるが、この変形段階では、赤色と緑色のプロットのほ

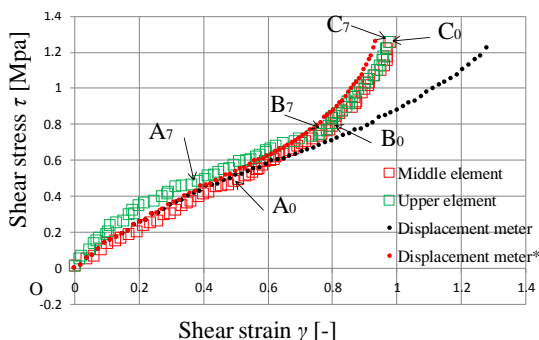


Fig.4 Relation of shear stress and shear strain

ぼ中間値となる。更に捩れが進んだ、B の状態では、赤色のプロットと緑色のプロットがほぼ一致しており、この変形段階では中央から上部までの変形が比較的一様に生じていることが確認できる。その一方で、画像より得られた結果と試験機の回転角より得られた結果に差異が生じ始め、C の状態では差異が増大する。

4.2 剪断歪の分布に与える標点間の伸びの影響

大変形下での実際の変形形状の観察から、ここでは標点間の伸びの影響について考察することにする。まず、図 3 の中の要素 d の位置での試験片表面における標点間距離 L は、変形後の形状を考慮すると以下のように表される。

$$L' = L \sqrt{1 + \left(\frac{\pi a \varphi_{deg}}{180 L}\right)^2} \quad (1)$$

これは、回転に伴い試験片表面の標点間距離が伸びることを意味する。この標点間距離の修正を施して、前述した要素 d に対する試験機の回転角より得られた剪断応力 τ と剪断歪 γ の関係を、再度、描いたものが図 4 中の赤色のプロット (●) である。この図より修正後の結果は、本画像解析より得られた測定値 (プロット (□) と (□)) に近づくことが確認できる。

次に、図 5 は、捩り角 $\varphi_{deg} = 135$ [deg] の A の状態と $\varphi_{deg} = 315$ [deg] の C の状態に対して、図 3 の a ~ g の 7 カ所の微小要素の測定から得られる剪断歪の分布の結果を比較したものである。A の状態では、修正前と修正後 (赤の曲線) の結果ならびに画像解析の実験結果の差異が小さいが、変形が進行した C の状態では、修正前と修正後の結果に差異が表れ、また、修正後 (赤の曲線) の結果は画像解析の測定値に近づくことが確認できる。

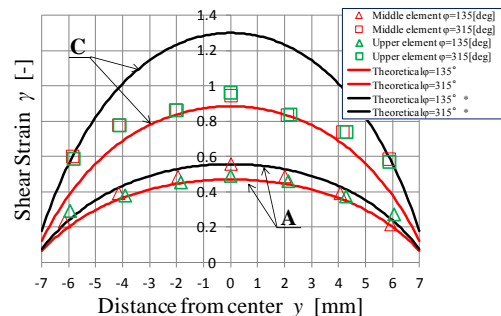


Fig.5 Shear stress and shear strain

5. 結言

本研究の画像解析手法に基づき、正方形断面のゴムの試験片に大きな剪断変形を加えた際にその表面に生じる歪の分布を調査することで以下のことが明らかとなった。

- (1) 有限変形理論に基づく本画像解析の実験値と、従来の正方形断面棒の捩り理論に基づき試験機の回転角より得られた測定値を比較した結果、変形が増大するにつれて両者の結果に差異が生じる。
- (2) 正方形断面棒の捩りの厳密解に大変形下の試験片表面における標点間距離の修正を考慮した結果は、本画像解析の実験結果に近づくことが確認できた。