L-56

熱伝導解析における陰解法の計算精度

Computational Accuracy of Implicit Method in Thermal Conduction Analysis

○西野将平 [1],　　大貫進一郎 [2]
*Shohei Nishino[1], Shinichiro Ohnuki[2]

Abstract: Recently, miniaturization of devices has progressed in science and technology and thermal analysis becomes more important. In this report, the heat conduction equation is solved by using the differential method and thermal conduction analysis is performed. Making a comparison between implicit and explicit methods, we investigate computational accuracy.

1.　はじめに

近年，科学技術の進歩に伴いデバイスの小型化が進んでいる．デバイス中の熱は安全面や動作スピードの低下，寿命の低下など大きな影響を及ぼしており，熱解析の重要性が増している．本報告では差分法により熱伝導解析を行い，時間間隔変化に対する陰解法の計算精度を明らかにする．

2.　解析手法

(2.1)　熱伝導方程式

熱伝導の解析を行うため, 式(1)に示す熱伝導方程式を用いる．

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\nabla^2 T \tag{1}$$

ここで，T：温度，t：時間，D：熱拡散率である. また，媒質によって変化する熱拡散率の式を(2)に示す.

$$D = \frac{\lambda}{\rho c} \tag{2}$$

ここで，λは熱伝導率，ρは密度，cは比熱である．熱伝導解析は比較のため以下の陽解法と陰解法により行う．

(2.2)　陽解法

計算概略を図 1 に示す．nは時間ステップ数，Δtは時間刻みとすれば，陽解法は現時刻$n\Delta t$での値を用いて次の時刻$(n+1)\Delta t$ での温度を逐次計算により求める方法である．1 次元での定式化は次式となる．

$$T_x^{n+1} = T_{x+1}^n + (1-2\gamma)T_x^n + T_{x-1}^n \tag{3}$$

陽解法には安定条件があり，収束範囲を超えると数値は不安定となる．式中のγは安定条件に関するパラメータで，以下により定義する．

$$\gamma = D\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \tag{4}$$

ただし，Δxはセルサイズである．

(2.3)　陰解法

図 2 に示した陰解法は，時刻$(n+1)\Delta t$ での温度を用いて数値解を求める方法であり，1 次元で定式化を行うと式(5)となる．

$$-T_{x+1}^{n+1} + (1+2\gamma)T_x^{n+1} - T_{x-1}^{n+1} = T_x^n \tag{5}$$

式(5)を変形し求めた連立 1 次方程式を解くことにより，時刻 $n\Delta t$ での温度が求まる．陰解法は無条件安定となることが陽解法との違いである．

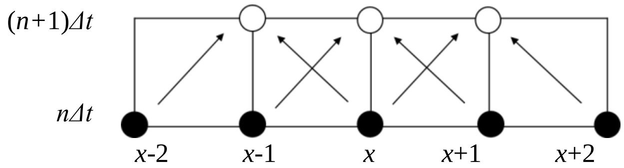


図 1　陽解法の原理

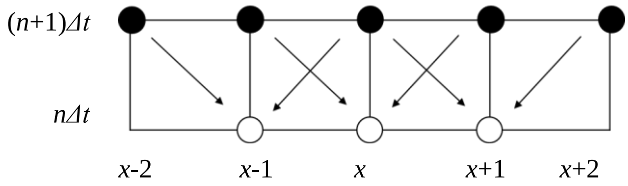


図 2　陰解法の原理

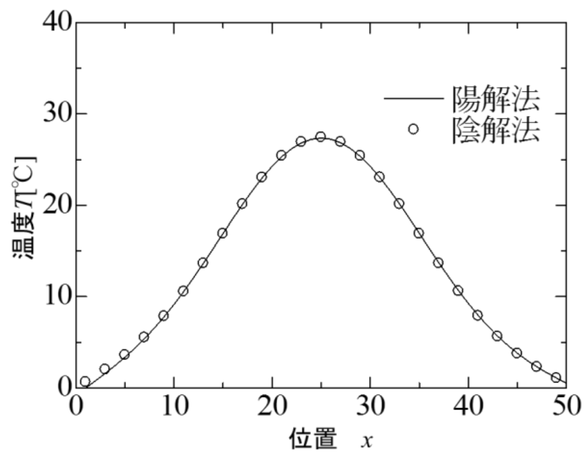


図 3　1 次元熱伝導解析例(γ =0.25)

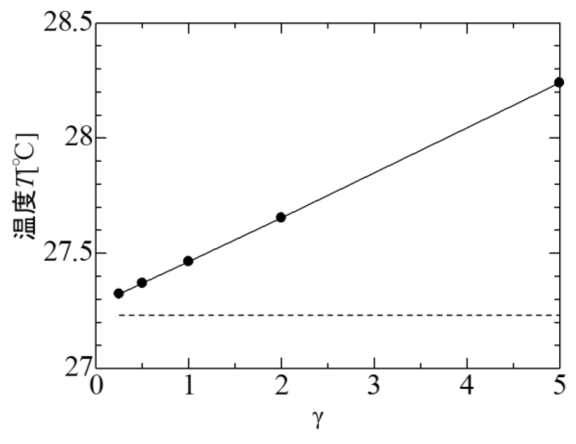


図 4　γによる陰解法の計算精度

1:日大理工・学部・電気　　2:日大理工・教員・電気

3.　解析結果

(3.1)　1 次元解析

長さ 50 cm の金属棒に対して熱伝導解析を行った．媒質は金で，密度 $\rho = 19.32\ \mathrm{g/cm^3}$，比熱 $c = 130\ \mathrm{J/kg}$，熱伝導率 $\lambda = 295\ \mathrm{W/(m \cdot ^\circ C)}$ と仮定した．初期値として解析領域の中心に熱源 $T_0 = 100$ ℃ を与え，熱伝導の様子を陽解法と陰解法により解析する． 図 3 に $\gamma = 0.25$ とした時の比較結果を示す．いずれの結果も図上で完全に一致し，信頼性の高い結果が得られている．

図 4 は安定条件のパラメータ γ の値を変化させた時の陰解法の結果である．破線で示す陽解法 $\gamma = 0.25$ の結果と比較し，γ の値が大きくなるにつれて相対誤差が大きくなる．$\gamma = 0.25$ では 0.34 %，$\gamma = 5$ では 3.79 % となった．

(3.2)　2 次元解析

媒質を 1 次元解析と同様に金を用い，解析領域を 10 μm ×10 μm，セルサイズ $\Delta x = 100$ nm，$\Delta y = 100$ nm，解析時間を 0~10 ps と設定した．解析領域の中心に熱源 $T_0 = 500$ ℃ を初期値としてあたえて熱伝導の様子をシミュレーションした．

図 5 は t=10 ps での金の温度分布を示す．(a)は陽解法での結果である．高温部から低温部への熱伝導の様子が確認できた．(b)は陰解法の結果であり，図上で陽解法と一致することが確認できた．

表 1 に陰解法の計算時間と使用メモリを示した．γ の値にかかわらず使用メモリはほぼ一定であるが，解析時間は大きく変化する．$\gamma = 0.1175$ の時，解析時間は 18.44 s となり，陽解法の $\gamma = 0.1175$ とほぼ同程度である．γ を更に大きくすることで陽解法に比べて解析時間を短縮できる．

4.　まとめ

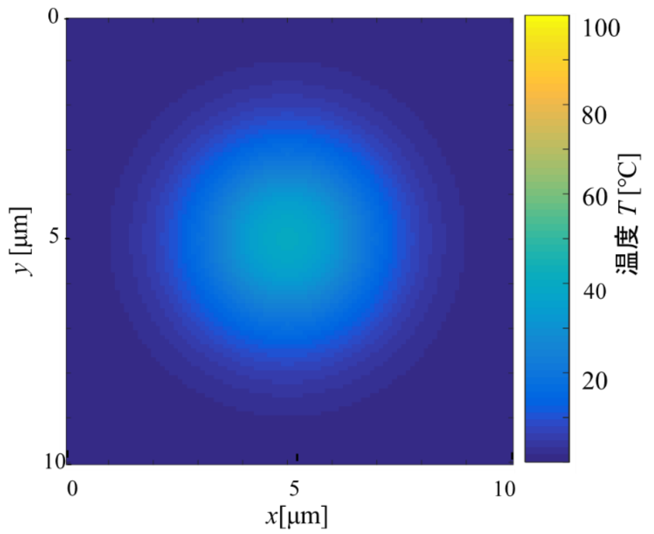
本報告では差分法により熱伝導解析を行い，時間間隔変化に対する陰解法の計算精度，解析時間及び使用メモリを明らかにした．検証の結果 γ の数値を大きくすることで解析時間は短くなるが，精度は悪くなった．また，γ の値に関わらず使用メモリは同程度であった．

5.　謝辞

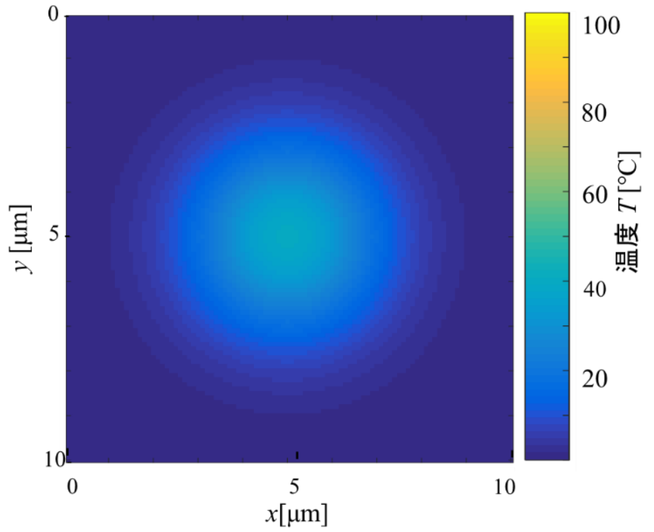
本研究の一部は私立大学戦略研究基盤形成支援事業の援助を受けて行われた．

6.　参考文献

[1]　橋本修：実践 FDTD 時間領域差，pp106~130　2006.
[2]　西川兼安，藤田恭伸：「機械工学講座　伝熱学」，pp4~27 2006.
[3]　西野将平，大貫進一郎：”高性能半導体デバイスの創成に向けた熱伝導数値シミュレーション”，電気学会　2017　第 8 回学生研究発表会，2-10，2017-9.
[4]　西野将平，種田亮太，上村凌平，遠藤源博：”差分法を用いた熱伝導数値シミュレーション”，EST 研究会，若手・学生エレクトロニクスソフトウェアコンテスト，2017-9.



(a)　陽解法



(b)　陰解法

図 5　2 次元熱伝導解析例

表 1　陰解法の解析時間と使用メモリ

γ	解析時間[s]	使用メモリ[MB]
0.01175	197	270.02
0.0235	96.6	270.0
0.047	47.1	267.02
0.1175	18.44	265.2
1.175	1.963	260.02