O-3

BSSN 方程式による重力波の３次元数値シミュレーション

Numerical simulation of three-dimensional gravitational waves with BSSN equations

○大塚翔平[1]，岩本弘一[2]
*Shohei Otsuka[1], Koichi Iwamoto[2]

Abstract: Black holes are formed by gravitational collapse of massive stars or coalescence of compact binary systems. Gravitational waves are radiated in the process of forming black holes. We can study energetic astronomical phenomena including the formation of the early universe by observing gravitational waves. Numerical simulations are important to analyze the gravitational waves. We write a numerical code to follow the time evolution of a three-dimensional spacetime with BSSN equations. We use a conformally flat and $K=0$ initial condition for the evolution of the spacetime. We adopt geodesic slice $(\alpha=1)$ as the slice condition and zero shift $(\beta^i=0)$ as the spatial gauge condition for simplicity. We demonstrate the results of test calculations with the code.

１．はじめに

ブラックホールは大質量星の重力崩壊や，コンパクト連星の合体により形成される．ブラックホールが形成される過程でも重力波が発生すると考えられている．重力波は天体現象や初期宇宙の状態を知るために必要であると注目されている．重力波を解析するためには数値シミュレーションが重要である[1]．本研究では BSSN 方程式を用いた重力波の時間発展の３次元数値計算コードを作成する．差分化は２次精度の陽解法を採用した．コンフォーマルフラット $(\bar{\gamma}_{ij}=\eta_{ij})$ と $K=0$ を仮定し，geodesic slice $(\alpha=1)$ とゼロシフト $(\beta^i=0)$ を設定する．作成したコードを用いてテストモデルの数値シミュレーションを行なう．

２．BSSN 方程式

世界間隔ds^2は（３＋１）形式によって次のように書かれる．

$$ds^2=-\alpha^2dt^2+\gamma_{ij}(dx^i+\beta^i dt)(dx^j+\beta^j dt)$$

ここで$\alpha,\beta^i,\gamma_{ij}$はそれぞれラプス関数，シフトベクトルと３次元計量である．（３＋１）形式を用いて，アインシュタイン方程式から発展方程式と拘束条件を得ることができる．

BSSN 方程式は，Arnowitt らによって考案された ADM 方程式を共形因子$\psi=e^{\phi}$を用いて共形変換し書き換えることにより，長時間の安定な計算を可能にした計算手法である．BSSN 方程式の基本変数は共形因子ϕ，外的曲率のトレースK，共形３次元計量$\bar{\gamma}_{ij}$，外的曲率の共形トレースレスパート$\tilde{A}_{ij}$，ガンマドライバー$\bar{\Gamma}^i$の５つである．

$$\begin{cases}\phi=(\ln\gamma)/12\\ K=\gamma^{ij}K_{ij}\\ \bar{\gamma}_{ij}=e^{-4\phi}\gamma_{ij}\\ \tilde{A}_{ij}=e^{-4\phi}(K_{ij}-\gamma_{ij}K/3)\\ \bar{\Gamma}^i=\bar{\gamma}^{jk}\bar{\Gamma}^i_{jk}=-\partial_j\bar{\gamma}^{ij}\end{cases}$$

また，エネルギー密度，エネルギーテンソルの空間射影，およびそのトレースをそれぞれρ,S_{ij},Sとして，基本変数の時間発展の式を次に示す.

$$\partial_t\phi=-\frac{1}{6}\alpha K+\beta^i\partial_i\phi+\frac{1}{6}\partial_i\beta^i\ ,$$

$$\partial_t K=-\gamma^{ij}D_iD_j\alpha+\alpha\left(\tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij}+\frac{1}{3}K^2\right)+4\pi\alpha(\rho+S)+\beta^i\partial_i K\ ,$$

$$\partial_t\bar{\gamma}_{ij}=-2\alpha\tilde{A}_{ij}+\beta^k\partial_k\bar{\gamma}_{ij}+\bar{\gamma}_{ik}\partial_j\beta^k+\bar{\gamma}_{kj}\partial_i\beta^k-\frac{2}{3}\bar{\gamma}_{ij}\partial_k\beta^k\ ,$$

$$\partial_t\tilde{A}_{ij}=e^{-4\phi}\left\{-\left(D_iD_j\alpha\right)^{\mathrm{TF}}+\alpha\left(R_{ij}^{\mathrm{TF}}-8\pi S_{ij}^{\mathrm{TF}}\right)\right\}+\alpha\left(K\tilde{A}_{ij}-2\tilde{A}_{ik}\tilde{A}^k_j\right)+\beta^k\partial_k\tilde{A}_{ij}+\tilde{A}_{ik}\partial_j\beta^k+\tilde{A}_{kj}\partial_i\beta^k-\frac{2}{3}\tilde{A}_{ij}\partial_k\beta^k\ ,$$

$$\partial_t\Gamma^i=-2\tilde{A}^{ij}\partial_j\alpha+2\alpha\left(\bar{\Gamma}^i_{jk}\tilde{A}^{kj}-\frac{2}{3}\bar{\gamma}^{ij}\partial_j K-8\pi\bar{\gamma}^{ij}S_j+6\tilde{A}^{ij}\partial_j\phi\right)+\beta^j\partial_j\bar{\Gamma}^i-\bar{\Gamma}^j\partial_j\beta^i+\frac{2}{3}\bar{\Gamma}^i\partial_j\beta^j+\frac{1}{3}\bar{\gamma}^{ki}\partial_j\partial_k\beta^j+\bar{\gamma}^{kj}\partial_k\partial_j\beta^i\ ,$$

１：日大理工・院（前）・物理　２：日大理工・教員・物理

ここで∂_tは時間の偏微分を表し，∂_i, D_iは i 番目の座標変数での偏微分および共変微分を表す．また上付き添え字の TF はテンソルの trace-free を定義する．例えばリッチテンソルの場合は $R_{ij}^{\mathrm{TF}} = R_{ij} - \gamma_{ij}R/3$ である。

またハミルトニアン拘束条件および運動量拘束条件を得る．

$$R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho \ ,$$

$$D_j K^j{}_i - D_i K = 8\pi j_i \ ,$$

拘束条件から初期値を求め，5 本の発展方程式を差分化し数値的に解くことでシミュレーションを行なう．

３．初期条件およびスライス条件

スライス条件として geodesic slice：$\alpha = 1$を採用し，シフトベクトルはゼロシフト（$\beta^i = 0$）とする．

時空が真空であると仮定すれば,ハミルトニアン拘束条件の右辺はゼロとなる．

$$R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 0 \ ,$$

共形因子$\psi = e^{\phi}$を用いて$\tilde{A}_{ij}$を変換し，

$$\hat{A}_{ij} = \psi^6 \tilde{A}_{ij} \ ,$$

ハミルトニアン拘束条件を書き換える．

$$\tilde{\Delta}\psi = \frac{1}{8}\left[\tilde{R}\psi - \left(\tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} - \frac{2}{3}K^2\right)\psi^5\right] \ ,$$

ここで$\tilde{\Delta} = \tilde{D}_k \tilde{D}^k$は$\bar{\gamma}_{ij}$で表されるラプラシアンである．さらに平坦な時空（$\bar{\gamma}_{ij} = \eta_{ij}, K = 0$）を仮定すると，

$$\Delta_{\mathrm{flat}}\psi = -\frac{1}{8}\psi^{-7}\hat{A}_{ij}\hat{A}^{ij} \ ,$$

ここでΔ_{flat}はη_{ij}で表されるラプラシアンである.Mを系の重力質量として境界条件を設定する:

$$\psi = 1 + \frac{M}{2r} \ ,$$

適当なψを与えた後,境界条件を満たすように繰り返し式を解く．ψが得られれば$\phi, \tilde{A}_{ij}$の初期値を設定することができる．

$$\phi = \ln\psi \ ,$$

$$\tilde{A}_{ij} = \phi^{-6}\hat{A}_{ij} \ ,$$

４．テストモデルの計算結果

Shibata & Nakamura(1995)[2]に従い$\hat{A}_{ij}$を与え，テストモデルについてシミュレーションを行なった．時間，空間ともに２次精度で計算した.計算領域は(x, y, z)についてそれぞれ$-6 \le x^i \le 6$の範囲である．グリッド数を$(N_x, N_y, N_z) = (60,60,30)$とし，ステップ数を$N_t = 2000$として$t = 10$までの時間発展を追った．$(x, y, z,) = (4.2\ ,0\ ,0)$における計算結果を Figure 1 に示す．ここで

$h_{yy} = \bar{\gamma}_{yy} - 1$は共形３次元計量の$yy$成分の摂動である。また$z = 0$における$xy$平面上の$h_{yy}$の状態を Figure 2 に示す．これは原点から外側に向かって重力波が伝わっている様子を示している．

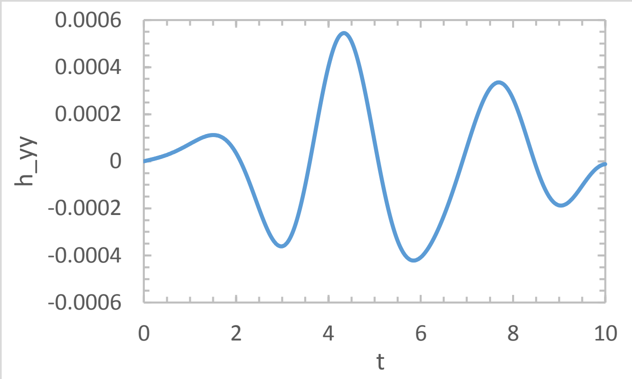

Figure 1. Time evolution of h_{yy}.

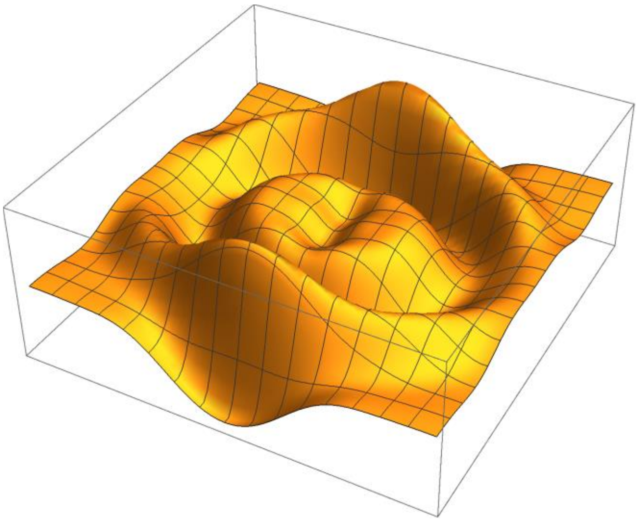

Figure 2. The contour of h_{yy} at t=4.5.

５．今後の展望

テストモデルについて解析解に近づけるためにコードの修正し，スライス条件を変えて計算していきたい．また単独星の重力崩壊や連星系で発生する重力波について調べていきたい．

６．参考文献

[1] T.W.Baumgarte & S,L,Shapiro : “Numerical relativity and compact binaries”, Phys, Rep, 376, 41(2003).

[2] M.Shibata & T.Nakamura : “Evolution of three-dimensional gravitational waves: Harmonic slicing cases”, Phys, Rev, D52, 5428(1995).