O-5

MERA の構造と AdS 時空との関係
Structure of MERA and its relation to AdS spacetime

○宮崎 悠人[1], 三輪 光嗣[2]
*Yuto Miyazaki , Akitsugu Miwa

Abstract : We review the structure of the Multiscale Entanglement Renormalizaion Ansatz (MERA) that can effectively estimate ground states of critical quantum systems. It is suggested that the graph geometry of the MERA is a discrete version of Anti-de Sitter (AdS) spacetime. Relations between lengths in AdS spacetime and the MERA graph are disucussed. We also discuss relations between a MERA graph laplacian and the AdS spacetime laplacian.

1． 導入

量子多体系は，系のサイズに対し全状態数が指数的に増大するので，大きな系の基底状態を計算するには近似的な手法が必要である．Multiscale Entanglement Renormalizaion Ansatz (MERA) は，空間 d 次元格子上での量子臨界系の基底状態を効率良く計算出来るテンソルネットワークである [1,2]．MERA では，繰り込み方向を新たな次元として，実空間繰り込みで系が粗視化されていく様子が図示される．特に，各繰り込みステップ毎に，テンソルを用いて局所エンタングルメントを可能な限り解いてから繰り込むことで，基底状態を効率良く計算することが出来る．また，Swingle により，MERA と Anti-de Sitter (AdS) 時空との関係が見出され，この関係が AdS 時空と共形場理論 (CFT) の対応である AdS/CFT 対応の 1 つの例であることが指摘された [3]．ここでは，[3] の論文に沿って，MERA の構造及び，MERA でのグラフ幾何と AdS 時空との関係について紹介する．

2． MERA の構造

図 1 で，最下層に並ぶ丸が量子系の各サイトであり，三角形と四角形の記号で表されるテンソルと，ボンドで繋がれている．三角形は isometry w と呼び，k^d 個のサイトを 1 つのサイトに粗視化する．四角形は disentangler u と呼び，隣接するサイトのエンタングルメントを解く．これらのテンソルは次の関係を満たす．

$$w^{\alpha}_{\beta_1\cdots\beta_{k^d}} w^{\dagger\beta_1\cdots\beta_{k^d}}_{\alpha'} = \delta^{\alpha}_{\alpha'} \tag{1}$$

$$u^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\beta_2} u^{\dagger\beta_1\beta_2}_{\alpha'_1\alpha'_2} = \delta^{\alpha_1}_{\alpha'_1}\delta^{\alpha_2}_{\alpha'_2} \tag{2}$$

量子系は繰り込む度に上の段へと粗視化され，サイト数は $1/k^d$ になる．一方，各階層における格子間隔が表す長さスケール z は，1 度繰り込むと前の層の長さスケールの k 倍になるので，MERA は長さスケール毎に分割された階層構造を成していると言える．最下層での長さスケール $z = \epsilon$ は UV カットオフに相当する．

ここで任意の部分空間 A を取る．全系の密度行列 ρ に対し，A 以外の空間 $\bar{A}$ をトレースアウトしたものを，縮約密度行列 $\rho_A\,(= \mathrm{Tr}_{\bar{A}}(\rho))$ と呼ぶ．この時，A と $\bar{A}$ のエンタングルメントの度合いを表すエンタングルメントエントロピー (EE)S_A は ρ_A を用いて

$$S_A = -\mathrm{Tr}\left(\rho_A \ln \rho_A\right) \tag{3}$$

で与えられる．

d 次元上で，サイズ L の部分空間 A に対する基底状態の EE は

$$S_A \sim L^{d-1} \tag{4}$$

という面積則に従うと考えられている [4]．面積則に従わない例としては，1 次元量子臨界系の EE が

$$S_A = \frac{c}{3}\ln L \tag{5}$$

で与えられること等が知られている [5]．

臨界系での EE を MERA 上で計算する為に，系を長さスケール $d\ln z(= dz/z)$ 毎に分割する．繰り込む度にその長さスケールで面積則を適用すると，EE への寄与は

$$dS \sim \left(\frac{L}{z}\right)^{d-1}\frac{dz}{z} \tag{6}$$

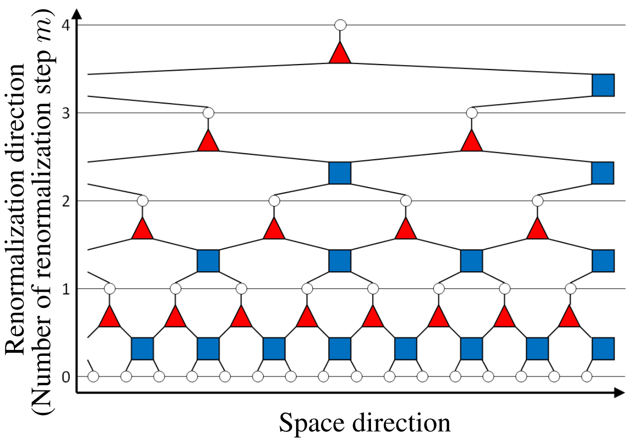

Figure 1. Example of 1-dimentional MERA($k = 2$)

[1] 日大理工・院（前）・物理
[2] 日大理工・教員・物理

となる．これを，UV の長さスケール ϵ から IR の長さスケール L まで積分すると

$$S_{d=1} \sim \ln\left(\frac{L}{\epsilon}\right) \tag{7}$$

$$S_{d>1} \sim \frac{1}{d}\left(\frac{L}{\epsilon}\right)^{d-1} \tag{8}$$

となる．ここで，(7) 式は (5) 式に対応し，(8) 式は (4) 式を満たす．

３． MERA のグラフ幾何と AdS 時空の対応

$d+1$ 次元 AdS 時空の計量は，$z=0$ を境界として，x_i を境界に沿った方向，z を動径方向とすると

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = R^2\left(\frac{dz^2+dx_i{}^2}{z^2}\right) \tag{9}$$

で与えられる．ただし，$i=1\cdots d$．ここで我々は，$d=1$ の AdS 時空で 2 つの曲線 γ_1 と γ_2 の長さを考え，それらが MERA のグラフ幾何で与えられる同様の曲線の長さに対応することを見る．

γ_1 は，2 点 $(x_1,z)=(\pm L/2,z_0)$ を結ぶ，$z=z_0$ 上での曲線である．γ_2 は，2 点 $(x_1,z)=(\pm L/2,0)$ を最短距離で結ぶ曲線であり，$x_1^2+z^2=(L/2)^2$ という関係式を満たす．曲線の長さは (9) 式より，カットオフ $z=\epsilon$ を用いて，以下のようになる．

$$|\gamma_1|_{AdS} = R\left(\frac{L}{z_0}\right),\ |\gamma_2|_{AdS} = 2R\ln\left(\frac{L}{\epsilon}\right) \tag{10}$$

次に，MERA 上で，γ_1 と γ_2 に対応する曲線の長さを考える．同じ層での隣接したサイト間の距離を R_1，あるサイトと，それが繰り込まれたサイトの間の距離を R_2 とおく．$z=z_0$ の層において，2 つのサイト間に含まれるサイトの数は，L/z_0 個となるから

$$|\gamma_1|_{MERA} = R_1\left(\frac{L}{z_0}\right) \tag{11}$$

となる．

$z=\epsilon$ の層にある 2 つのサイトは，繰り返し粗視化された結果，隣接したサイトになるか，或いは同一のサイトになる．MERA での 2 点間の最短距離 γ_2 は，これらのサイトを経由する経路で与えられる．その層までに $\log_k(L/\epsilon)$ 回繰り込む必要があるから

$$|\gamma_2|_{MERA} = 2R_2\log_k\left(\frac{L}{\epsilon}\right) \tag{12}$$

となる．結果的に，$R_1=R$，$R_2=R\ln k$ とすれば，MERA のグラフ幾何で与えられる長さは，AdS 時空での長さと一致することが分かる．

４． グラフラプラシアンによる AdS 時空との対応

格子上の特定のサイトを v，そのサイトに繋がれたボンドの数を $n(v)$，そのボンドで繋がれた隣接サイトを v' とする．この格子上でのグラフラプラシアン Δ_G は

$$\Delta_G f(v) = f(v) - \frac{1}{n(v)}\sum_{v'} f(v') \tag{13}$$

で与えられる．

これを MERA のグラフに適用する．繰り込み回数 m にあるサイトは，$m-1$ の層とは k^d 本，m の層とは $2d$ 本，$m+1$ の層とは 1 本のボンドで結ばれている．このことと，各層での一様性を仮定すると，繰り込み方向のみに依存するグラフラプラシアンによるラプラス方程式は，以下で与えられる．

$$f(m) - \frac{k^d f(m-1)+2df(m)+f(m+1)}{k^d+2d+1} = 0 \tag{14}$$

ここで，$m=n$ 層での $f(n)$ を解く．$f(n)=\alpha^n$ を (14) 式に代入すると，$\alpha=1,k^d$ を得る．

一方，AdS 時空のラプラシアンは，定義より，

$$\Delta_{AdS} f = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu(\sqrt{g}g^{\mu\nu}\partial_\nu f) \tag{15}$$

で与えられる．ここで，(9) 式の計量を用いて，(15) 式を解く．その解の中で，z のみに依存する解は $f=1,z^d$ で与えられる．

今，MERA の繰り込み方向のみに依存するグラフラプラシアンによるラプラス方程式の解 $f=1,k^{dn}$ と，AdS 時空のラプラス方程式の z 方向のみに依存する解 $f=1,z^d$ を得た．MERA では，繰り込む度に長さスケールが k 倍されるので，$z\sim k^n$ と取ると，これらの 2 つの解は一致する．このことから，MERA のグラフが，AdS 時空を格子状に分割したものになっていることが示唆される．

５． まとめと今後の課題

ここでは，量子臨界系の基底状態の計算に有用な MERA の構造を紹介し，MERA のグラフが，AdS 時空を格子状に分割したものであると示唆されることを見た．近年，この AdS/MERA 対応が成立する為に課される条件に関する指摘がなされており [6]，AdS/MERA 対応の更なる整合性や条件を調べることが今後の課題の 1 つである．

参考文献

[1] G. Vidal, Phys. Rev. Lett. 99, 220405 (2007).
[2] G. Vidal, Phys. Rev. Lett. 101, 110501 (2008).
[3] B. Swingle, Phys. Rev. D 86, 065007 (2012).
[4] M. Srednicki, Phys. Rev. Lett. 71, 666 (1993).
[5] P. Calabrese and J. Cardy, J. Stat. Mech. P06002 (2004).
[6] N. Bao, C. Cao, S. M. Carroll, A. Chatwin-Davies, N. Hunter-Jones, J. Pollack and G. N. Remmen, Phys. Rev. D 91, 125036 (2015).