O-6

減衰調和振動子の正準量子化
Canonical quantization of the damped harmonic oscillator

○藤原侑樹 [1]，　中野邦彦 [2]，　出口真一 [3]
*Yuki Fujiwara[1], Kunihiko Nakano[2], Shinichi Deguchi[3]

Abstract : We study two quantization procedures of the damped harmonic oscillator.

1．導入

本研究の目的は, 散逸系の簡単な例の一つである 1 次元減衰調和振動子の量子論を考察することである.

減衰調和振動子の運動方程式は

$$m\ddot{x}+\gamma\dot{x}+kx=0,\quad 4mk>\gamma^2 \tag{1}$$

で与えられる．ここで, $x=x(t)$ は質点の座標, m は質点の質量, γ は減衰係数, k はばね定数である．式 (1) を導く代表的なラグランジアンとして, あらわに時間依存するもの (Caldirola-Kanai ラグランジアン) と，あらわに時間依存しないもの (Bateman-Feshbach-Tikochinsky (BFT) ラグランジアン) が知られている．あらわに時間依存するラグランジアンは, 量子化した際に不確定性関係の破れを導くなど, 幾つかの問題点が指摘されている [1]. 本研究ではあらわに時間依存しないラグランジアンを採用し, これに基づき量子化を行う.

2．１次元減衰調和振動子の正準量子化

BFT ラグランジアンは

$$L=m\dot{x}\dot{y}+\frac{1}{2}\gamma\left(x\dot{y}-\dot{x}y\right)-kxy \tag{2}$$

と与えられる [2, 3]．ここで, y は x の時間反転に対応する仮想的な座標変数である．式 (2) から, 式 (1) と増幅振動の運動方程式 $m\ddot{y}-\gamma\dot{y}+ky=0$ が導かれる.

いま, 新たな変数 $x_1:=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$, $x_2:=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$ を定義すると, 式 (2) は

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2-\dot{x}_2^2\right)-\frac{\gamma}{2}(x_1\dot{x}_2-\dot{x}_1x_2)-\frac{k}{2}\left(x_1^2-x_2^2\right) \tag{3}$$

と書き換えられる．式 (3) から, 正準ハミルトニアンは

$$H=\left(\frac{1}{2m}p_1^2+\frac{1}{2}m\omega^2x_1^2\right)-\left(\frac{1}{2m}p_2^2+\frac{1}{2}m\omega^2x_2^2\right)-\frac{\gamma}{2m}(x_1p_2+x_2p_1) \tag{4}$$

と求まる．ここで, p_1, p_2 は, x_1, x_2 に対する正準共役運動量であり, $\omega:=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\gamma^2}{4m^2}}$ である．ポアソン括弧は $\{x_1,p_1\}=1$, $\{x_2,p_2\}=1$ と与えられる.

正準変数 x_1, x_2, p_1, p_2 を演算子 $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$ に, ポアソン括弧を交換関係 $[\hat{x}_1,\hat{p}_1]=i\hbar$, $[\hat{x}_2,\hat{p}_2]=i\hbar$ に置き換えることで量子化を行う．式 (4) からハミルトニアン演算子 $\hat{H}$ を得た後に, 演算子 $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$ の線形結合をとり, 新たな演算子 $a_1, a_1^\dagger, a_2, a_2^\dagger$ を定義する．このとき, 交換関係は $\left[a_1,a_1^\dagger\right]=1$, $\left[a_2,a_2^\dagger\right]=1$ となり, $\hat{H}$ は

$$\hat{H}=\hbar\omega\left(a_1^\dagger a_1-a_2^\dagger a_2\right)-i\frac{\hbar\gamma}{2m}\left(a_1^\dagger a_2^\dagger-a_1a_2\right) \tag{5}$$

となる.

3．フィッシュバッハ・ティコスキーの量子化法

先行研究 [3] では, 以下で説明するように, $su(1,1)$ リー代数の表現論を用いて式 (5) の固有値が求められ, 対応する状態ベクトルが表す物理現象が考察された．初めに, $su(1,1)$ リー代数を満たす生成子 $X:=\frac{1}{2}\left(a_1^\dagger a_2^\dagger+a_1a_2\right)$, $Y:=i\frac{1}{2}\left(a_1^\dagger a_2^\dagger-a_1a_2\right)$, $Z:=\frac{1}{2}\left(a_1^\dagger a_1+a_2a_2^\dagger\right)$ を定義する． 生成子 X, Y, Z と交換するカシミア演算子は $h_0:=\frac{1}{2}\left(a_1^\dagger a_1-a_2^\dagger a_2\right)$ で与えられる．以上の Y, h_0 を用いると式 (5) は

$$\hat{H}=2\hbar\omega h_0-\frac{\hbar\gamma}{m}Y \tag{6}$$

と書くことができる.

次に, 数演算子 $N_1:=a_1^\dagger a_1$ と $N_2:=a_2^\dagger a_2$ を定義する．数演算子 N_1, N_2 の固有値 n_1, n_2 は非負整数であり, これらを用いて, N_1 と N_2 の同時固有状態 $|n_1,n_2\rangle$ が指定される．この状態を $|j,l\rangle$ $\left(j:=\frac{1}{2}(n_1-n_2),\ l:=\frac{1}{2}(n_1+n_2)\right)$ と表すと, Z と h_0 の固有値方程式は $Z|j,l\rangle=\left(l+\frac{1}{2}\right)|j,l\rangle$, $h_0|j,l\rangle=j|j,l\rangle$ と書ける． ここで, j と l のとりうる値は $j=0,\pm\frac{1}{2},\pm1,\cdots$, $l=|j|,|j|+1,|j|+2,\cdots$ となる.

いま, $Y=\pm i\mathrm{e}^{\mp\frac{\pi}{2}X}Z\mathrm{e}^{\pm\frac{\pi}{2}X}$ という関係式と Z の固有値方程式を用いると, Y の固有値方程式が

$$Y|\psi_{\pm jl}\rangle=\pm i\left(l+\frac{1}{2}\right)|\psi_{\pm jl}\rangle \tag{7}$$

と得られる．ただし, $|\psi_{\pm jl}\rangle$ は $|\psi_{\pm jl}\rangle:=\mathrm{e}^{\mp\frac{\pi}{2}X}|j,l\rangle$ で定義され, h_0 の固有値方程式 $h_0|\psi_{\pm jl}\rangle=j|\psi_{\pm jl}\rangle$ も満たす. 以上のことから, 式 (6) に $|\psi_{\pm jl}\rangle$ を作用させると固有値が

$$E=\hbar\omega(n_1-n_2)\mp i\frac{\hbar\gamma}{2m}(n_1+n_2+1) \tag{8}$$

$(n_1,n_2=0,1,2,\cdots)$ と求まる．式 (8) の実部は数演算子の固有値の差に振動数を掛けたものであり, 虚部は数演算子の固有値の和に減衰係数を掛けたものになっている. 式 (8) を用いると, シュレーディンガー方程式の特殊解が

$$|\psi_{\pm jl}(t)\rangle=\mathrm{e}^{-i\omega(n_1-n_2)t}\mathrm{e}^{\mp\frac{\gamma}{2m}(n_1+n_2+1)t}|\psi_{\pm jl}\rangle \tag{9}$$

と求まる．この式より $|\psi_{+jl}\rangle$ は崩壊状態を表し, $|\psi_{-jl}\rangle$ は成長状態を表していると解釈できる.

いま, 式 (5) の $\hbar\omega$ に比例する項に注目する. 演算子 a_2 を消滅演算子として素朴な真空状態を定義すると, エネ

[1] 日大理工・院 (後)・量子　[2] 本郷高等学校　[3] 日大・量科研

ルギー固有値 (E の実部) は不定値になる．これに対して，フィッシュバッハ・ティコスキーの手法 [3] を梅沢・高橋の熱場の理論 (TFD) の枠組みに当てはめることで，減衰調和振動子の量子化の再考察が行われた [4]．この研究では，a_2, $a_2^\dagger$ は TFD のチルダ演算子に相当し，熱浴の自由度を表していると解釈された．一方，通常の力学的な見方をする場合，エネルギー固有値は不定値になり，力学系が不安定になる問題が生じる．本研究では，この問題に対する解決策を提案する．

４．Imaginary-scaling 変換を用いた量子化法

Pais-Uhlenbeck (PU) 振動子 [5] は，４階微分方程式に従う振動子であり，２つの２階微分方程式に従う振動子として表すことができる．対応するハミルトニアン演算子は異なる振動数の数演算子の差として表されるため，エネルギー固有値は不定値になり，力学系が不安定になる．Mostafazadeh は，PU 振動子に対して Imaginary-scaling 変換を行うことにより，状態ベクトルのノルムの正定値性を保ちつつ，エネルギー固有値が正定値になるような量子化を行った [6]．Imaginary-scaling 変換は

$$b := AaA^{-1} = -ia^\dagger, \quad b^\ddagger := Aa^\dagger A^{-1} = -ia \tag{10}$$

のように生成・消滅演算子 a, $a^\dagger$ で構成される $A := \exp\left[-i\frac{\hbar\pi}{4}\left(a^2 - a^{\dagger 2}\right)\right]$ を用いて変換をする手法である．このとき，随伴表現として $\ddagger$ が定義される．また，新たな真空状態 $b|0\rangle\!\rangle = 0$ ($|0\rangle\!\rangle := A|0\rangle$) を定義する．

実際に，Imaginary-scaling 変換を減衰調和振動子の量子化に適用する．いま，$A := \exp\left[-i\frac{\hbar\pi}{4}\left(a_2^2 - a_2^{\dagger 2}\right)\right]$ を用いて，Imaginary-scaling 変換を行うと

$$b_1 = a_1,\ b_1^\ddagger = a_1^\dagger,\ b_2 = -ia_2^\dagger,\ b_2^\ddagger = -ia_2 \tag{11}$$

となる．また，真空状態 $|0\rangle\!\rangle$ を $b_1|0\rangle\!\rangle = b_2|0\rangle\!\rangle = 0$ と定義する．式 (11) から，式 (5) は

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(b_1^\ddagger b_1 + b_2^\ddagger b_2 + 1\right) + \frac{\hbar\gamma}{2m}\left(b_1^\ddagger b_2 - b_2^\ddagger b_1\right) \tag{12}$$

と書き換えられる．次に，b_1, $b_1^\ddagger$, b_2, $b_2^\ddagger$ の線形結合をとり，新たな演算子 B_1, $B_1^\ddagger$, B_2, $B_2^\ddagger$ を定義することで $\hat{H}$ を対角化する．このとき，交換関係は $\left[B_1, B_1^\ddagger\right] = 1$, $\left[B_2, B_2^\ddagger\right] = 1$ となる．真空状態 $|0\rangle\!\rangle$ は $B_1|0\rangle\!\rangle = B_2|0\rangle\!\rangle = 0$ となり，B_1, B_2 は消滅演算子として，$B_1^\ddagger$, $B_2^\ddagger$ は生成演算子として扱われる．式 (12) を対角化すると，$\hat{H}$ は

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(B_1^\ddagger B_1 + B_2^\ddagger B_2 + 1\right) - i\frac{\hbar\gamma}{2m}\left(B_1^\ddagger B_1 - B_2^\ddagger B_2\right) \tag{13}$$

となる．随伴共役 $\dagger$ に対して，式 (5) は自己共役であったが，随伴共役 $\ddagger$ に対して，式 (13) は自己共役ではない．

次に，数演算子 N_1 と N_2 を $N_1 := B_1^\ddagger B_1$, $N_2 := B_2^\ddagger B_2$ と定義する． 数演算子 N_1, N_2 の固有値 n_1, n_2 は非負整数であり，これらを用いて，N_1 と N_2 の同時固有状態 $|n_1, n_2\rangle\!\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2!}}\left(B_1^\ddagger\right)^{n_1}\left(B_2^\ddagger\right)^{n_2}|0\rangle\!\rangle$ が指定される．

このとき，状態ベクトルのノルムは $\langle\!\langle m_1, m_2|n_1, n_2\rangle\!\rangle = \delta_{n_1 m_1}\delta_{n_2 m_2}$ であり，正定値となる．式 (13) に $|n_1, n_2\rangle\!\rangle$ を作用させると，$\hat{H}$ の固有値が

$$E = \hbar\omega\left(n_1 + n_2 + 1\right) - i\frac{\hbar\gamma}{2m}\left(n_1 - n_2\right) \tag{14}$$

$(n_1, n_2 = 0, 1, 2, \cdots)$ と求まる．式 (14) の実部は数演算子の固有値の和に振動数を掛けたものであり，虚部は数演算子の固有値の差に減衰係数を掛けたものになっている．エネルギー固有値は正定値になり，力学系の不安定性の問題が解決される．式 (14) を用いると，シュレーディンガー方程式の特殊解は

$$|\psi_{n_1,n_2}(t)\rangle\!\rangle = \mathrm{e}^{-i\omega(n_1+n_2+1)t}\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2m}(n_1-n_2)t}|n_1, n_2\rangle\!\rangle \tag{15}$$

と求まる． この式は $n_1 > n_2$ の場合に崩壊状態を，$n_1 < n_2$ の場合に成長状態を，$n_1 = n_2$ の場合に安定状態を表していると解釈できる．

次に，固有関数を $\psi_{n_1,n_2}(x_1, x_2, t) := \langle\!\langle x_1, x_2|\psi_{n_1,n_2}(t)\rangle\!\rangle$ $\left(\langle\!\langle x_1, x_2| := \langle x_1, -x_2|A^{-1}\right)$ と定義する．このとき，x_2 を対角化する表示では

$$\langle\!\langle x_1, x_2|\hat{x}_2 = -ix_2\langle\!\langle x_1, x_2|,\ \langle\!\langle x_1, x_2|\hat{p}_2 = \hbar\frac{\partial}{\partial x_2}\langle\!\langle x_1, x_2| \tag{16}$$

となることから，固有関数は

$$\psi_{n_1,n_2}(x_1, x_2, t) = G_{n_1,n_2}K_{n_1,n_2}(\zeta, \bar{\zeta})\mathrm{e}^{-\zeta\bar{\zeta} - i\omega(n_1+n_2+1)t - \frac{\gamma}{2m}(n_1-n_2)t} \tag{17}$$

と求まる (バーは複素共役を表す)．ここで，G_{n_1,n_2} は $t = 0$ において定めた規格化定数であり，$K_{n_1,n_2}(\zeta, \bar{\zeta})$ は複素エルミート多項式である．また，ζ は $\zeta := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x_1 + ix_2\right)$ と定義される．シュレーディンガー方程式の一般解は，式 (17) の線形結合である．

５．まとめ

BFT ラグランジアンに基づき，減衰調和振動子の量子化を行った．フィッシュバッハ・ティコスキーの量子化法を適用すると，式 (5) のエネルギー固有値は不定値になり，力学的な不安定性が生じる．本研究では，Imaginary-scaling 変換を用いた量子化法を適用して，この問題を解決した．エネルギー固有値と状態ベクトルのノルムは，共に正定値となる．先行研究 [3] の状態ベクトルは，崩壊状態と成長状態を表していたが，本研究の状態ベクトルは，それらに加え，安定状態も表すことが分かった．

参考文献

[1] D. Greenberger, J. Math. Phys. **20** 762, (1979).
[2] H. Bateman, Phys. Rev. **38** 815, (1931).
[3] H. Feshbach, Y. Tikochinsky, Trans. N. Y. Acad. Sci. **38** 44, (1977).
[4] E. Celeghini, M. Rasetti, G. Vitiello, Ann. Phys. **215** 156, (1992).
[5] A. Pais, G. Uhlenbeck, Phys. Rev. **79** 145, (1950).
[6] A. Mostafazadeh, Phys. Rev. D **84** 105018 (2011).