

P-1

3次元形状データを用いたシマウマの縞パターンの数値シミュレーション

Simulation of a zebra stripe pattern using body shape data

○大野 紗由香¹ 小紫 誠子²*Sayuka Ono¹ Satoko Komurasaki²

Abstract: Reaction-diffusion equations are calculated to simulate the stripe pattern of zebras. The equations are solved by employing a finite-differential method in the 3D computational domain that is within the thick skin covering the body. A horse's body shape data are used. As a result of computation, a 3D Turing pattern is obtained, and a stripe pattern resembling a zebra appears on the neck and legs.

1. 緒論

シマウマの発生的なメカニズムは未だよく分かっていない。Turing は、パターンのメカニズムを説明する仮説を立てた。Turing は作用の異なる2つの物質がある条件のもとで反応しながら拡散することで、物質の濃度差の波が生まれ、その波がパターンとなると考えた。彼の考えた方程式は、2つの物質の濃度に関する反応と拡散を組み合わせた反応拡散方程式である。そして、近藤らにより、実際に縞パターンを持つ一部の魚の表皮模様は Turing メカニズムで現れることが証明された。

本研究では、Turing メカニズムに基づいて、2種の異なる作用を持つ活性化因子-抑制因子系の反応拡散方程式を用いてシマウマの縞パターンの計算を行う。生物の表皮に見られるパターンの多くがこの Turing パターンで再現できることはよく知られているが、多くが2次元平面上でのパターンである。本計算ではウマの形状データを用いて、ウマの体形に沿う閉曲面に厚みを付けた3次元空間内で反応拡散方程式を解くことで、シマウマの縞パターンの再現を試みる。

2. 活性化因子-抑制因子系

細胞が2種類の物質 u, v を出していると仮定する。

下の図は活性化因子-抑制因子系の物質 u と v の動きを表した模式図である。

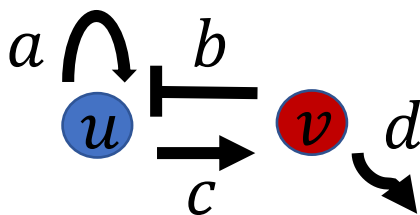


Figure 1. System of activator u and inhibitor v .

a : 活性化因子 u を増やす

b : 活性化因子 u を抑制する

c : 抑制因子 v を増やす

d : 抑制因子 v を減らす

これらの物質の役割を踏まえたうえで、増やす働きを正、減らす働きを負として反応項にパラメータ a, b, c, d を与えた。

活性化因子-抑制因子系の特徴は、 u が増加すると活性化効果で v も増加し、 v が増加すると抑制効果により u が減少する。

3. 拡散誘導不安定性

空間均一な平衡状態が、拡散の影響により不安定化し、空間不均一なパターンに発展していくことがある。これを拡散誘導不安定性という。

反応拡散方程式系においては、その平衡点が、系の拡散項を無視した反応方程式系において局所漸近安定かつ、拡散項を加えた反応拡散方程式系では不安定となる場合に、拡散誘導不安定性を呈する。

4. 計算方法

4.1 反応拡散方程式

本計算では以下の反応拡散方程式を用いる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f(u, v) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + g(u, v) \quad (2)$$

$$f(u, v) = au + bv, g(u, v) = cu + dv$$

u を活性化因子、 v を抑制因子とする。

右辺の $f(u, v), g(u, v)$ は反応項、 $D_u \Delta u, D_v \Delta v$ は拡散項を表す。

パターンが生まれるためには解が拡散誘導不安定性となる以下の条件を満たす必要がある。

- I. $a + d < 0$
 - II. $ad - bc > 0$
 - III. $(D_u b - D_v a)^2 - 4D_u D_v (ad - bc) > 0$
- この条件を満たす活性化因子-抑制因子系反応拡散方程式を用いる。

4.2 計算条件

ウマの形状データを用いて、表面付近で反応拡散方程式を解く。ウマの形状データは以下のものを使用した。

(<https://www.thingiverse.com/thing:597082>)

初期条件: u, v を0~1の間でランダムな値を与える。

$$a = 1, b = -3, c = 1, d = -2$$

$$D_u = 10^{-5}, D_v = 10^{-4}$$

4.3 数値解析法

支配方程式はオイラー陽解法により時間積分を行う。数値計算のための離散化については差分法を用いる。また、格子分割数は $80 \times 180 \times 200$ とした。

5. 計算結果

Figure 2. の左の図は初期に0~1の間でランダムな値を与えた u の、ウマの表面上での分布の様子を示したものである。右の図は x 方向と y 方向の各断面内の初期の u の分布で、ウマの表面に厚みを付けた3次元空間の計算領域を示している。可視化画像はClef3Dを用いて作成した。色の変化は左下のカラーバーに従い、赤いほど値が大きいことを表す。

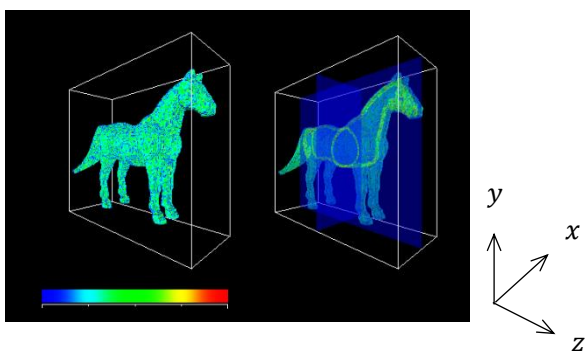


Figure 2. Initial value of u .

Figure 3. は反応拡散方程式をウマの表面付近で解いて、十分時間が経過したあとの、 u の値を可視化したものである。Figure 3. は投影方向を z 軸負の方向にとったものと投影方向を x 軸正の方向にとった図である。

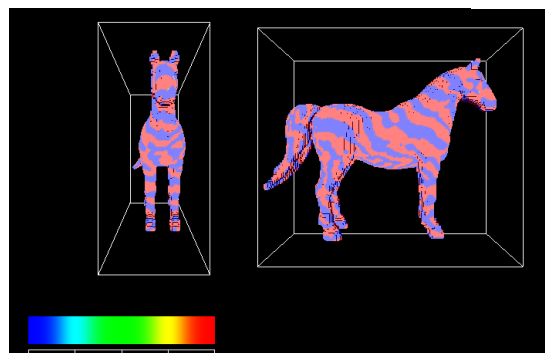


Figure 3. Distribution of activator u on the body.

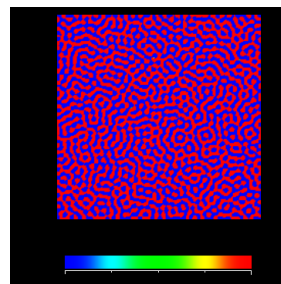


Figure 4. Distribution of activator u in 2D.

Figure 4. は同じ方程式で計算した2次元パターンである。

6. まとめ

3次元形状データを用いてシマウマの表面付近で計算を行った結果、首回りや脚にシマウマに似たパターンが得られた。パラメータを工夫することで、改善の余地があると考えられる。シミュレーションを行うことで、2種類の物質の混ざり合いで、パターンが生み出される様子を捉えることができた。

参考文献

- [1]河村哲也:数値シミュレーション入門,サイエンス社(2006).
- [2]Linda J.S.Allen:生物数学入門,共立出版(2011).
- [3]James D.Murray:マレー数理生物学 応用編,丸善出版(2016).
- [4]柳田英二:反応拡散方程式,東京大学出版会(2015).
- [5] A. M. Turing : The Chemical Basis of Morphogenesis, Philosophical Transactions of the Royal Society(1952).
- [6] Hiroto Shoji, Atsushi Mochizuki, Yoh Iwasa, Masashi Hirata, Tsuyoshi Watanabe, Syozo Hioki, Shigeru Kondo : Origin of Directionality in the Fish Stripe Pattern, DEVELOPMENTAL DYNAMICS ,Vol.226,pp627- 633, (2003).
- [7]生命科学 DOKIDOKI 研究室
<https://www.terumozaidan.or.jp/labo/technology/15/index.html>
- [8] Kondo Shigeru,Rihito Asai : A reaction-diffusion wave on the skin of the marine angelfish Pomacanthus Nature,Vol.376,pp765-768,(1955).