

## Dummett の論理 LC に対応する hypersequent calculus の部分体系について

### Subsystems of hypersequent calculi which is equivalent to Dummett's logic LC

横溝恭平

Kyohei Yokomizo<sup>1</sup>

Abstract: Let  $\mathcal{S}$  be a set of propositional logical symbols containing the implication ( $\rightarrow$ ). We consider  $\mathbf{GLCW}_{\mathcal{S}}$  which is the  $\mathcal{S}$ -reduct of the hypersequent calculus characterized by the class of the totally ordered Kripke frames. We give counter example for the case of  $\forall \in \mathcal{S}$  of Avron's cut-elimination theorem of  $\mathbf{GLCW}_{\mathcal{S}}$  ([1]). Since, for a given Kripke frame  $\mathbf{W}$ , the condition " $\mathbf{W}$  is totally ordered" is equivalent to the condition "the width of  $\mathbf{W}$  is 1", we can consider generalization of it, i.e., we consider the  $\mathcal{S}$ -reduct of the hypersequent calculus characterized by Kripke frames whose width is  $m$  or less for a given integer  $m \geq 1$ .

## 1. はじめに

数理論理学, とりわけ命題論理と呼ばれる分野では, 数学における命題を以下の文字による列 (論理式と呼ぶ) で表現し, 証明をその列の機械的な操作によって取り扱う.

1. 命題変数  $p, q, r, \dots$ ;
2. 命題定数  $\perp$  (偽),  $\top$  (真);
3. 論理記号  $\rightarrow$  (ならば),  $\wedge$  (かつ),  $\vee$  (または),  $\neg$  (否定).

この際, 論理式に現れる命題変数自体の真偽, 例えば  $p$  が真であるか偽であるかについては, 証明中には一切関知しない. 従って, 命題論理の目的は, 四つの論理記号, またそれらの組み合わせが証明においてどのような役割を果たすかを考察することと考えることができる.

命題論理を考えるにあたり基本的な論理である直観主義論理  $\mathbf{H}$  は, 以下で定義される.

公理型: 次の形をした論理式は証明可能.

- $$(K) p \rightarrow (q \rightarrow p);$$
- $$(S) (p \rightarrow q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r));$$
- $$(\wedge 1) (p \wedge q) \rightarrow p;$$
- $$(\wedge 2) (p \wedge q) \rightarrow q;$$
- $$(\wedge 3) (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \wedge r));$$
- $$(\vee 1) p \rightarrow (p \vee q);$$
- $$(\vee 2) q \rightarrow (p \vee q);$$
- $$(\vee 3) (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r));$$
- $$(\neg 1) (p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p);$$
- $$(\neg 2) \neg p \rightarrow (p \rightarrow q);$$

推論規則: 論理式  $A \rightarrow B$  と  $A$  が共に証明可能ならば,  $B$  も証明可能.

今回考察する Dummett による論理  $\mathbf{LC}$  は,  $\mathbf{H}$  に新たな公理型 ( $L$ ) を加えることにより得られる:

$$(L) ((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (((q \rightarrow p) \rightarrow r) \rightarrow r).$$

これら論理式の証明可能性を考察するため, より複雑な構造を持った体系が知られている. hypersequent は, 補助的な記号  $\Rightarrow$  と  $|$  を用いて,

$$\Gamma_1 \Rightarrow \gamma_1 \mid \cdots \mid \Gamma_m \Rightarrow \gamma_m$$

という形で定義される. ここで  $\Gamma_i$  は論理式の multiset で,  $\gamma_i$  は論理式一つもしくは空集合である. これは

$$(\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow T(\gamma_1)) \vee \cdots \vee (\bigwedge \Gamma_m \rightarrow T(\gamma_m))$$

と翻訳される. ここで  $\bigwedge \Gamma_i$  は  $\Gamma$  の全ての元を  $\wedge$  で結んだものであり,  $T(\gamma_i) = \begin{cases} \gamma_i & (\gamma_i \neq \emptyset) \\ \perp & (\gamma_i = \emptyset) \end{cases}$  とする.

$\mathbf{LC}$  に対応する hypersequent calculus は直観主義命題論理に対応する hypersequent calculus  $\mathbf{HLJ}$  に対し, 次の推論規則のいずれかを付け加えることで得られる. ただし  $G$  は hypersequent のメタ変数を表す.

split rule:  $G \mid \Gamma, \Delta \Rightarrow A$  が証明可能ならば,  $G \mid \Gamma \Rightarrow A \mid \Delta \Rightarrow A$  も証明可能

communication rule:  $G \mid \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow A$  と  $G \mid \Delta_1, \Delta_2 \Rightarrow B$  が共に証明可能ならば,  $G \mid \Gamma_1, \Delta_1 \Rightarrow A \mid \Gamma_2, \Delta_2 \Rightarrow B$  も証明可能.

以後,  $\mathcal{S}$  を  $\rightarrow$  を元にもつ論理記号の集合とする. つまり  $\rightarrow \in \mathcal{S} \subseteq \{\rightarrow, \wedge, \vee, \neg\}$  とする.

いま,  $\mathbf{HLJ}$  に対し, その言語を論理記号について  $\mathcal{S}$  に制限した hypersequent calculus を,  $\mathbf{HLJ}_{\mathcal{S}}$  と書く. つまり  $\mathbf{HLJ}_{\mathcal{S}}$  は  $\mathbf{HLJ}$  に「証明関数中出现する hypersequent は, 全て  $\mathcal{S}$ -hypersequent でなければならない」という制限を

1: 日大理工・院 (後)・数学

加えた hypersequent calculus である。HLJ に split rule を加えることで得られる hypersequent calculus を  $\text{GLCW}_S$ , communication rule を加えることで得られる hypersequent calculus を  $\text{GLC}_S$  と書く。  $\text{GLCW}_S$  と  $\text{GLC}_S$  の間には、次の関係があることが知られている。

**定理 1 (Avron[1])** 1.  $\wedge \in S$  ならば、  $\text{GLCW}_S$  と  $\text{GLC}_S$  は同等な体系である;

2.  $\wedge \notin S$  ならば、  $\text{GLCW}_S$  は  $\text{GLC}_S$  より真に弱い体系である。

## 2. $\text{GLCW}_S$ のカット除去定理

hypersequent calculus の体系における、推論規則 cut は以下で定義される。

cut rule:  $G \mid \Gamma \Rightarrow A$  と  $G \mid \Sigma, A \Rightarrow B$  が共に証明可能ならば、  $G \mid \Gamma, \Sigma \Rightarrow B$  も証明可能である。

**Claim 2 (Avron[1])** 以下は同値:

1.  $\wedge \in S$ ;
2.  $\text{GLCW}_S$  において、 cut rule が他の推論規則の組み合わせにより再現できる。

しかし、  $\vee$  の場合について反例が見つかったことから、定理を以下の形に修正した。

**定理 3** 以下は同値:

1.  $S = \{\rightarrow\}, \{\rightarrow, \neg\}$ ;
2.  $\text{GLCW}_S$  において、 cut rule が他の推論規則の組み合わせにより再現できる。

**証明 4**  $\vee \notin S$  または  $\wedge \in S$  の場合は、 Avron([1]) と同じ。  $\vee \in S$  かつ  $\wedge \notin S$  の場合は、次の hypersequent が cut rule そのものを使わない限り証明可能でないことが、証明の長さに関する帰納法で示せる:

$$a \Rightarrow b \vee c \mid a \rightarrow b \vee c, b \rightarrow d, c \rightarrow d \Rightarrow d.$$

## 3. $\text{GLCW}_S$ の一般化

論理記号を  $S$  に制限した論理に対応する代数を  $S$  代数と呼ぶ。

$\text{GLC}_S$  の一般化  $\text{HBW}_k$  は、 Ciabattoni([2]) らにより与えられている。

一方、  $\text{GLCW}_S$  の一般化  $\text{GLCW}_S^m$  を、 HLJ に次の形の推論規則を加えた形で与える ( $\text{GLCW}_S^1 = \text{GLCW}_S$  である)。

$m$ -split rule:  $G \mid \Gamma_i, \Gamma_j \Rightarrow A$  ( $i, j = 0, \dots, m, i < j$ ) が全て証明可能ならば、  $G \mid \Gamma_1 \Rightarrow A \mid \dots \mid \Gamma_m \Rightarrow A$  も証明可能である。

**定理 5 (Jankov[3])** 任意の有限かつ *subdirectly irreducible* な  $S$  代数  $\mathbf{M}$  に対し、次を満たす  $S$  論理式  $X(\mathbf{M})$  が存在する: 任意の  $S$  代数  $\mathbf{N}$  に対し  $X(\mathbf{M})$  が  $\mathbf{N}$  で valid でないことと、  $\mathbf{M}$  が  $\mathbf{N}$  の何らかの部分代数と同型であることは同値。

$\{\rightarrow\}$  代数  $\mathbf{Z}_m = \{1\} \cup \mathcal{P}(\{e_1, \dots, e_m\})$  を、  $x \rightarrow y =$

$$\begin{cases} 1 & (y = 1 \text{ or } x \subseteq y) \\ y & (x = 1) \\ x^c \cup y & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

で定める ( $\{e_1, \dots, e_m\}$  は勝手な  $m$  点集合、  $\mathcal{P}$  は冪集合を表す)。

**定理 6** 以下は全て同等な論理である。ただし  $\mathbf{H}_S$  は直観主義論理  $\mathbf{H}$  に対し、その言語を  $S$  に制限したものとする:

1.  $\text{GLCW}_S^m$ ;
2.  $\mathbf{H}_S + \{p_i \rightarrow (p_j \rightarrow q) \mid (i, j = 0, \dots, m, i < j)\} \rightarrow \bigvee_{i=1}^m (p_k \rightarrow q)$ ;
3.  $\mathbf{H}_S + X(\mathbf{Z}_m)$ ;
4.  $\mathbf{H}_S + \phi_m$ .

ここで、  $\mathbf{H}_S + X(\mathbf{Z}_m)$  は  $\mathbf{H}_S$  に公理型として  $X(\mathbf{Z}_m)$  を加えた体系を表し(他も同様)、また、  $\phi_m = (\bigvee_{k=1}^m p_1 \rightarrow \dots \rightarrow p_{k-1} \rightarrow (p_k \rightarrow q) \rightarrow q) \vee (p_1 \rightarrow \dots \rightarrow p_m \rightarrow q)$  と定め、論理式の有限集合  $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  に対し、  $\Gamma \rightarrow A$  を  $\gamma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \gamma_n \rightarrow A$  の略記とする。

**定理 7** 以下は同値:

1.  $S = \{\rightarrow\}, \{\rightarrow, \neg\}$ ;
2.  $\text{GLCW}_S^m$  において、 cut rule が他の推論規則の組み合わせにより再現できる。

## 4. 参考文献

- [1] A. Avron, *Hypersequents, logical consequence and intermediate logics for concurrency*, **Annals of Mathematics and Artificial Intelligence**, vol.4, 225-248, 1991.
- [2] A. Ciabattoni and M. Ferrari, *Hypersequent calculi for some intermediate logics with bounded Kripke models*, **Journal of logic and computation**, vol.11, num.2, 283-294, 2001.
- [3] V. A. Jankov, *Conjunctively indecomposable formulas in propositional calculi*, **USSR-Izvestiya**, vol.3, num.1, 17-35, 1969.