P-7

狭義凸な等質錐の分類
A classification of strictly convex and homogeneous cones

○伊藤勝 [1]，　ロウレンソ ブルノ フィゲラ [2]
*Masaru Ito[1]，　Bruno Figueira Lourenço[2]

Abstract:　We show that every strictly convex and homogeneous cone K in $\mathbb{R}^n$ is isomorphic either $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$, or the second order cone $K_{n,2}$ (also known as the Lorentz cone). In particular, this characterization concludes that the p-th order cone $K_{n,p}$ for $p \in [1, \infty]$ is not homogeneous except the second order cone, which solves a problem posed by Gowda and Trott in 2014. The proof of the main result relies on the T-algebra established by Vinberg in 1963 which gives a one-to-one correspondence with homogeneous cones.

1. はじめに

$K, K' \subset \mathbb{R}^n$ を直線を含まない凸錐 (すなわち K は凸集合かつ $\alpha K \subset K, \forall \alpha > 0$ を満たす) とする. K と K' が**同型**であるとは, 線形な全単射 $A : \mathrm{span}(K) \to \mathrm{span}(K')$ が存在して $AK = K'$ となることである (A を同型写像と呼ぶ). K から K 自身への同型写像全体の集合を $\mathrm{Aut}(K)$ とかく.

開凸錐 K が**等質**であるとは, 任意の $x, y \in K$ に対して $A \in \mathrm{Aut}(K)$ が存在して $Ax = y$ となることである. 等質錐の基本的な例として, 二次錐

$$K_{n,2} := \left\{ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \,\middle|\, t > \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2} \right\}$$

および (実または複素) 半正定値行列錐

$$\{A \in M(n, k) \mid A^* = A,\ x^* A x > 0\ (\forall x \in k^n \setminus \{0\})\}, \quad k = \mathbb{R} \text{ or } \mathbb{C}$$

が知られている.

二次錐や半正定値行列錐を制約条件に持つ最適化問題は現実の応用問題を解く手段の候補として普及している. これらの錐に対して自己障壁関数を利用した**内点法**と呼ばれる最適化手法が確立されている. 内点法の効率はその錐の自己障壁関数のバリアパラメータの大きさに依存するため, なるべく小さなバリアパラメータを持つ自己障壁関数が構成できることが重要となる. 等質錐 K に対する自己障壁関数のバリアパラメータの下限は, 後述する K の階数に等しいことが知られており [2], 与えられた凸錐 K が等質であることは最適化の側面から有用な性質である.

Gowda と Trott [1] は p 次錐

$$K_{n,p} := \left\{ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \,\middle|\, t > \|x\|_p \right\}, \quad p \in [1, \infty]$$

(ただし $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ および $\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_{n-1}|^p)^{1/p}$, $p \neq \infty$ とする) について $\mathrm{Aut}(K_{n,1})$ および $\mathrm{Aut}(K_{n,\infty})$ の構造を決定し, 特に $K_{n,1}$ および $K_{n,\infty}$ が $n \geq 3$ のとき等質でないことを示した. 彼らはその際, 「二次錐以外の p 次錐が非等質であるか」という問題を提示している.

本研究では, 狭義凸な等質錐を決定し, 特に二次錐以外の p 次錐が等質でないことを示す.

2. 狭義凸な等質錐

凸集合 $C \subset \mathbb{R}^n$ の空でない凸部分集合 $F \subset C$ について「$x, y \in C,\ \alpha \in (0, 1),\ \alpha x + (1 - \alpha) y \in F \Rightarrow x, y \in F$」が成り立つとき, F を C の**面**と呼ぶ. 開凸錐 $K \subset \mathbb{R}^n$ が**狭義凸**であるとは, K の閉包 $\overline{K}$ の非自明な面 F (すなわち $\{0\} \subsetneq F \subsetneq \overline{K}$ である面) は $\dim(F) = 1$ を満たすことをいう. 例えば, $\mathbb{R}^{n-1}$ 上のノルム $\|\cdot\|$ と開凸錐 $K_{\|\cdot\|} := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \mid t > \|x\|\}$ について, $\|\cdot\|$ が狭義凸ノルム (すなわち $\|x\| = \|y\| = 1,\ x \neq y \Rightarrow \|x + y\| < 2$) であることと, $K_{\|\cdot\|}$ が狭義凸錐であることは同値である. 特に, $K_{n,p}$ は $p \notin \{1, \infty\}$ に対して狭義凸である.

本研究の主結果 [3] を以下に述べる.

1: 日大理工・教員・数学　　2: 成蹊大学

定理 1 開凸錐 $K \subset \mathbb{R}^n$ について, K が狭義凸な等質錐であることと, K が $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$ または $K_{n,2}$ のいずれかと同型であることは同値である.

Gowda と Trott [1] は二次錐はそれ以外の p 次錐と同型にならないことを示しており, したがって主結果を $K = K_{n,p}$ に対して考えてみると以下の結果を得る.

系 2 二次錐以外の p 次錐は等質でない.

3. T-代数

主結果 (定理 1) の証明には Vinberg [4] が確立した T-**代数**が有用である. T-代数は等質錐との一対一対応を与え, 行列代数を用いた等質錐の解析が可能とする.

実ベクトル空間 V 上に双線型写像 (積演算) $V \times V \ni (a,b) \mapsto ab \in V$ が与えられ, V は部分空間 V_{ij} の直和 $V = \bigoplus_{i,j=1}^r V_{ij}$ で書かれるとする. $V_{ij}V_{jk} \subset V_{ik}$ および $V_{ij}V_{kl} = \{0\}$ $(j \neq k)$ が成り立つとき, V を階数 r の行列代数という. いま, 同型写像 $* : V \to V$ で $a^{**} = a$, $(ab)^* = b^*a^*$, $V_{ij}^* = V_{ji}$ を満たすものが存在するとする. このとき, V が (階数 r の) T-**代数** であるとは, 以下が成り立つことである.

(i) $a(bc) = (ab)c, a(bb^*) = (ab)b^*, \forall a,b,c \in \hat{V} := \bigoplus_{i \leq j} V_{ij}$.

(ii) $\mathbb{R}$-代数としての同型写像 $\rho_i : V_{ii} \to \mathbb{R}$ が存在して, $e := \sum_{i=1}^n \rho_i^{-1}(1)$ に対して $ae = ea = a$.

(iii) $\mathrm{tr}(a) := \sum_{i=1}^n \rho_i(a_{ii})$ としたとき, $\mathrm{tr}(ab) = \mathrm{tr}(ba)$, $\mathrm{tr}((ab)c) = \mathrm{tr}(a(bc))$ $(\forall a,b,c \in V)$ および $\mathrm{tr}(aa^*) > 0$ $(\forall a \neq 0)$ が成り立つ.

Vinberg [4] は以下の T-代数と等質錐の対応を示した.

定理 3 (Vinberg [4]) T-代数 V に対して定義される凸錐

$$K(V) := \{aa^* \mid a \in \hat{V},\ \rho_i(a_{ii}) > 0\ (\forall i)\}$$

は V の部分空間 $V^H := \{a \in V \mid a^* = a\}$ 上の等質錐となる. 逆に, 任意の等質錐に対して T-代数 V が存在して K と $K(V)$ は同型になる.

本研究の主結果は証明では以下の命題が重要である.

命題 4 V を階数 r の T-代数とするとき, 次元が $r-1$ 以上の $\overline{K(V)}$ の非自明な面が存在する.

階数 r の T-代数 V に対して $K(V)$ が狭義凸であれば, 命題 4 で得られる面 F は $r - 1 \leq \dim(F) = 1$ を満たすから $r \leq 2$ である. 階数が 2 以下の T-代数は容易に分類でき, 主結果の主張を得る.

4. おわりに

本研究では, T-代数を用いて狭義凸な等質錐を決定し, 特に二次錐以外の p 次錐の非等質性を示した. Gowda と Trott [1] は $K_{n,1}$ と $K_{n,\infty}$ の自己同型群を決定しており, 今後の課題として $K_{n,p}$ の自己同型群の構造を明らかにすることが挙げられる.

5. 参考文献

[1] M. S. Gowda and D. Trott, On the irreducibility, Lyapunov rank, and automorphisms of special Bishop-Phelps cones, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **419**(1), pp. 172–184 (2014).

[2] Osman Güler and Levent Tunçel, Characterization of the barrier parameter of homogeneous convex cones, *Mathematical Programming*, **81**(1), pp. 55–76 (1998).

[3] M. Ito and B. F. Lourenço, The p-cones in dimension $n \geq 3$ are not homogeneous when $p \neq 2$, *Linear Algebra and its Applications*, **533**, pp. 326–335 (2017).

[4] E. B. Vinberg, The theory of homogeneous convex cones, *Transactions of the Moscow Mathematical Society* **12**, pp. 340–403 (1963).