P-8

制約条件付き変分問題と楕円型作用素の固有値問題について

Variational problems with constraints and eigenvalue problems for the elliptic operators

落合 圭祐 [1]
Keisuke Ochiai [1]

Abstract: We consider minimizing problems for some functionals with constraints. Eigenvalue problems for some elliptic operator are derived from the minimizing problems. We introduce Sobolev spaces and a notion of a weak solution of the eigenvalue problems. We show the Dirichlet elliptic operator has countably many positive eigenvalues and a family of corresponding eigenfunctions forms a complete orthonormal system on a subspace of L^2-spaces.

1. 制約条件付き変分問題

$n \in \mathbb{N}$ と有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω 上の関数 f, g に対し,

$$E[f] := K(f,f), \quad K(f,g) := \int_\Omega A(x)Df(x) \cdot Dg(x)\,dx$$

とおく. $A : \Omega \to M_n(\mathbb{R})$ は有界かつ対称とし, 定数 $c > 0$ が存在して任意の $x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$ に対し, $A(x)\xi \cdot \xi \geq c|\xi|^2$ をみたすとする. また, $Df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ は f の勾配であり,

$$\|v\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |v|^2\,dx,$$

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi : \Omega \to \mathbb{R}, \text{無限回微分可能}, \ \operatorname{supp}\varphi \text{ はコンパクト}\},$$

$$\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}} \cap \Omega$$

とかく. このとき, $E[f]$ を制約条件 $\|f\|_{L^2(\Omega)} = 1$ の下で, 最小化する関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ を求める問題, すなわち,

$$E[u] = \inf\left\{E[f] : f \in C_0^\infty(\Omega), \|f\|_{L^2(\Omega)} = 1\right\} \quad (1)$$

をみたす未知関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ を求める問題を考える. このような問題を制約条件付き変分問題という. 本研究では, 変分問題 (1) から楕円型作用素の固有値問題を導出し, その弱解の存在と性質について考える.

2. 変分計算

変分問題 (1) の解 $u \in C_0^\infty(\Omega)$ が存在すると仮定する. $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\Omega)$ と $0 \leq |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2| \ll 1$ に対し,

$$I(\varepsilon_1, \varepsilon_2) := E[u + \varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_2]$$
$$J(\varepsilon_1, \varepsilon_2) := \|u + \varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_2\|^2_{L^2(\Omega)}$$

とおくと, 制約条件 $J(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 1$ の下で, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ のとき, $I(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ は最小となる. Lagrange の未定乗数法を用いると, 定数 λ が存在して,

$$\frac{\partial(I - \lambda J)}{\partial \varepsilon_1}(0,0) = \frac{\partial(I - \lambda J)}{\partial \varepsilon_2}(0,0) = 0$$

が成り立つ. したがって, $j = 1, 2$ に対し,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial(I - \lambda J)}{\partial \varepsilon_j}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\Big|_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0} \\
&= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_j}\{E[u + \varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_2] \\
&\qquad - \lambda\|u + \varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_2\|^2_{L^2(\Omega)}\}\Big|_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0} \\
&= \left\{2\int_\Omega A(x)D(u + \varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_2) \cdot D\varphi_j\,dx \right. \\
&\qquad \left. - 2\lambda\int_\Omega (u + \varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_2) \cdot \varphi_j\,dx\right\}\Big|_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0} \\
&= 2\int_\Omega A(x)Du \cdot D\varphi_j\,dx - 2\lambda\int_\Omega u\varphi_j\,dx
\end{aligned} \quad (2)$$

となる. Gauss の発散定理より,

$$\int_\Omega \{-\operatorname{div}(A(x)Du) - \lambda u\}\varphi_j\,dx = 0$$

となり, 変分法の基本補題から,

$$L[u] = -\operatorname{div}(A(x)Du) = \lambda u \quad (3)$$

が得られる. ただし, ベクトル場 $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ に対し, $\operatorname{div} F = \frac{\partial F}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}$ である. 式 (3) の $L[u] = -\operatorname{div}(A(x)Du)$ は楕円型作用素である.

3. 楕円型作用素の固有値問題

2 節の変分計算から導いた楕円型作用素の固有値問題

$$\begin{cases} L[u] = -\operatorname{div}(A(x)Du) = \lambda u \text{ in } \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (4)$$

を考える. ここで, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ は未知関数, $\lambda \in \mathbb{R}$ は未知定数である. $u \neq 0$ が λ に対して, 方程式 (4) を満たすとき, λ を L の固有値, u を L の λ に対する固有関数という. 固有値問題 (4) を考えるため, Sobolev 空間と弱解を導入する.

1: 日大理工・院 (前)・数学

定義 3.1 (Sobolev 空間)**.** Sobolev 空間 $H^1(\Omega)$ を

$$H^1(\Omega) := \{f \in L^2(\Omega) : Df \text{ が存在して}, Df \in L^2(\Omega)\}$$

と定義する. また, $f \in H^1(\Omega)$ に対して, $H^1(\Omega)$ 上の f のノルムを

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} := \sqrt{\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|Df\|^2_{L^2(\Omega)}}$$

で定める. $C_0^\infty(\Omega)$ の $H^1(\Omega)$ における閉包を $H_0^1(\Omega)$ とかく.

定義 3.2 (弱解)**.** $(u, \lambda) \in (H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ が固有値問題 (4) の弱解であるとは, 任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して,

$$\int_\Omega A(x) Du \cdot D\varphi \, dx = \lambda \int_\Omega u\varphi \, dx$$

が成り立つことである.

定理 3.3. 固有値問題 (4) は可算無限個の弱解 $\{(v_i, \lambda_i)\}_{i=1}^\infty$ を持ち, 次が成り立つ.

$$(v_i, v_j)_{L^2(\Omega)} = \delta_{ij}, \tag{5}$$

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_i \le \ldots, \tag{6}$$

任意の $f \in H_0^1(\Omega)$ に対し,

$$f = \sum_{i=1}^\infty (f, v_i)_{L^2(\Omega)} v_i \quad \text{in } L^2(\Omega) \tag{7}$$

が成り立つ.

注意 3.4. 式 (5) より, $\{v_i\}_{i=1}^\infty$ は $L^2(\Omega)$ の正規直交系であり, 式 (7) より, $\{v_i\}_{i=1}^\infty$ は $H_0^1(\Omega)$ の $L^2(\Omega)$ の位相による完全正規直交系となる. すなわち, $\{v_i\}_{i=1}^\infty$ は有限次元における正規直交基底に対応している.

4. 定理 3.3 の証明の概略

関数空間 $H_1(\Omega)$ を

$$H_1(\Omega) := \{f \in H_0^1(\Omega) : K(f, f) < \infty\}$$

と定義し, 内積を

$$(f, g)_{H_1(\Omega)} := K(f, g) \quad (f, g \in H_1(\Omega)) \tag{8}$$

と定める. このとき, $H_1(\Omega)$ は内積 (8) により, Hilbert 空間であり, $H_1(\Omega)$ と $H_0^1(\Omega)$ は一致する.

$$\lambda_1 := \inf\{E[f] : f \in H_1(\Omega), \|f\|_{L^2(\Omega)} = 1\}$$

とおく. λ_1 の定義から, 最小化列 $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset H_1(\Omega)$ が存在して, $\|f_k\|^2_{L^2(\Omega)} = 1$, $E[f_k] \to \lambda_1$ $(k \to \infty)$ とできる.

補題 4.1 (Poincaré の不等式)**.** 定数 $C_p > 0$ が存在して, 任意の $f \in H_1(\Omega)$ に対し,

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \le C_p \|f\|_{H_1(\Omega)} = C_p (f, f)^{\frac{1}{2}}_{H_1(\Omega)}$$

が成り立つ.

補題 4.1 を用いると, $\lambda_1 > 0$ であることがわかる. $E[f_k] = \|f_k\|^2_{H_1(\Omega)}$ が収束するので, $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset H_1(\Omega)$ が $H_1(\Omega)$ 上有界であるから, Banach-Alaoglu の定理 ([3, p.58] 参照) より, 部分列 $\{f_{k_l}\}_{l=1}^\infty \subset \{f_k\}_{k=1}^\infty$ と $v_1 \in H_1(\Omega)$ が存在して, $\{f_{k_l}\}_{l=1}^\infty$ が v_1 に $H_1(\Omega)$ 上弱収束する.

補題 4.2 (コンパクト性)**.** $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset H_1(\Omega)$ が $f \in H_1(\Omega)$ に $H_1(\Omega)$ 上弱収束するならば $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ は f に $L^2(\Omega)$ 上強収束する.

補題4.2 より, $\{f_{k_l}\}_{l=1}^\infty$ が v_1 に $L^2(\Omega)$ 上強収束する. よって, $\|f_{k_l}\|^2_{L^2(\Omega)} = 1$ より, $\|v_1\|^2_{L^2(\Omega)} = 1$ だから, $v_1 \ne 0$, すなわち, $v_1 \in H_1(\Omega) \setminus \{0\} = H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ である. λ_1 の定義と Banach-Steinhaus の定理 ([3, p.22] 参照) から,

$$\lambda_1 \le E[v_1] = \|v_1\|^2_{H_1(\Omega)} \le \liminf_{l \to \infty} \|f_{k_l}\|^2_{H_1(\Omega)} = \lambda_1$$

となるため,

$$E[v_1] = \lambda_1 = \inf\left\{E[f] : f \in H_1(\Omega), \|f\|_{L^2(\Omega)} = 1\right\}$$

である. よって, 2 節の変分計算 (2) より, 任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して,

$$\int_\Omega A(x) Dv_1 \cdot D\varphi \, dx = \lambda_1 \int_\Omega v_1 \varphi \, dx,$$

すなわち, (v_1, λ_1) は固有値問題 (4) の弱解となる. 次に,

$$H_2(\Omega) := \{f \in H_1(\Omega), (f, v_1)_{L^2(\Omega)} = 0\},$$
$$(f, g)_{H_2(\Omega)} := K(f, g) \quad (f, g \in H_2(\Omega)),$$
$$\lambda_2 := \inf\left\{E[f] : f \in H_2(\Omega), \|f\|_{L^2(\Omega)} = 1\right\}$$

とおく. $H_2(\Omega) \subset H_1(\Omega)$ より $\lambda_1 \le \lambda_2$ である. λ_1 を λ_2, $H_1(\Omega)$ を $H_2(\Omega)$ として以上の議論を行うことで, 固有値問題 (4) の弱解 (v_2, λ_2) の存在が示せる. 以下, 帰納的に $H_i(\Omega)$ と λ_i を定めて, 上記の議論を行うことで弱解 $\{(v_i, \lambda_i)\}_{i=1}^\infty$ が存在することがわかる. また, 式 (6) と補題 4.2 を用いると, 固有値 $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ に対し, $\lambda_i \to \infty$ $(i \to \infty)$ が成り立つ. $f \in H_0^1(\Omega) = H_1(\Omega)$ に対し,

$$\left\| f - \sum_{k=1}^i (f, v_k)_{L^2(\Omega)} v_k \right\|^2_{L^2(\Omega)} \le \frac{1}{\lambda_{i+1}} E[f]$$

が成り立つため, 式 (7) が得られる.

5. 参考文献

[1] J.Jost, *Postmodern analysis Third Edition*, Springer, 2005.

[2] M. Kot, *A first course in the calculus of variations*, AMS, 2014.

[3] H. Brezis, 藤田 宏 (監訳), 小西 芳雄 (訳), 関数解析 その理論と応用に向けて, 産業図書, 1988.