P−9

Bessel 関数に関連する関数とその導関数の特殊値の代数独立性

On algebraic independence of functions related to the Bessel function and their derivatives

○白畑 佑太 [1]
*Yuta Shirahata[1]

Abstract: We prove Siegel's theorem on algebraic independence of the values at algebraic points of the functions $K_{\lambda_i}(z)$ and their derivatives. Each $K_{\lambda_i}(z)$ is closely related to the Bessel function. The proof involves showing algebraic independence of the functions $K_{\lambda_i}(z)$ and $K'_{\lambda_i}(z)$, and then invoking Siegel–Shidlovskii's second fundamental theorem which guarantees the invariance of transcendence degree at special values.

1. 諸定義と主定理

定義 1. (代数的独立，代数的従属)
L を体，K を L の部分体とする．$w_1, w_2, \cdots, w_n \in L$ が $\forall P(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ $(P \neq 0)$ に対して $P(w_1, w_2, \cdots, w_n) \neq 0$ であるとき，$w_1, w_2, \cdots, w_n$ は K 上**代数的独立**であるという．$w_1, w_2, \cdots, w_n$ が K 上代数的独立でないときは，K 上**代数的従属**であるという．

定義 2. (Bessel 関数)

$$J_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\lambda+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\lambda} \tag{1}$$

を **Bessel 関数**という．

注意 3. Γ 関数は，$\lambda \in \mathbb{Q}$ としても $\Gamma(\lambda) \notin \overline{\mathbb{Q}}$ となることがある（e.g. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$）．そこで，Bessel 関数の代わりに次を考える．

定義 4. (関数 $K_\lambda(z)$)
$\lambda \neq -1, -2, \cdots$ に対して，

$$K_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \tag{2}$$

とする．

注意 5.

$$J_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\lambda+1)\cdot(\lambda+1)\cdots(\lambda+n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\lambda} \tag{3}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda} K_\lambda(z) \tag{4}$$

定理 6. (Siegel [1])
$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{Q} \setminus (\{\cdots, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cdots\} \cup \{\cdots, -2, -1\})$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ とし，$i_1 \neq i_2$ $(i_i, i_2 = 1, 2, \cdots, m)$ のとき $\lambda_{i_1} \pm \lambda_{i_2} \notin \mathbb{Z}$ とする．さらに，$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$ の平方はすべて異なるものとする．このとき，$2mn$ 個の数 $K_{\lambda_i}(\xi_j)$, $K'_{\lambda_i}(\xi_j)$ は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上代数的独立である．

2. 主定理の帰着

ここでの定理 6 の証明は [2] に基づく．

定理 7. $\lambda_i,\ \xi_j$ $(i = 1, 2, \cdots, m,\ j = 1, 2, \cdots, n)$ が定理 6 の条件を満たすとき，微分方程式 $y''_{i,j} + \frac{2\lambda_i+1}{z} y'_{i,j} + \xi_j^2 y_{i,j} = 0$ の非自明な解を $f_{i,j}$ とすると，$\{f_{i,j},\ f'_{i,j} \mid i = 1, 2, \cdots, m,\ j = 1, 2, \cdots, n\}$ は $\mathbb{C}(z)$ 上代数的独立である．

定義 8. (house)
$\theta \in \overline{\mathbb{Q}}$ とし，θ の共役を $\theta^{(i)}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ と表す．このとき，$\max_i |\theta^{(i)}|$ を θ の **house** といい，$\overline{|\theta|}$ と表す．

定義 9. (E-関数)
関数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^n}{n!}$ が次の 3 条件を満たすとき，$f(x)$ を **E-関数**という．

1° $c_n \in K$ $(n = 0, 1, 2, \cdots$, K は代数体．)
2° $\forall \varepsilon > 0$，$\overline{|c_n|} = O(n^{\varepsilon n})$，$n \longrightarrow \infty$
3° $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \{q_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ $s.t.$ $q_n c_k \in \mathcal{O}_K$ $(k = 0, 1, \cdots, n;\ n = 1, 2, \cdots)$，$q_n = O(n^{\varepsilon n})$，$n \longrightarrow \infty$

E-関数は，指数関数 e^x をモデルにしている．例えば，e^x, $\sin x$, $P(x) \in K[x]$ は E-関数である．

命題 10. $K_\lambda(z)$ は E-関数である．

定理 11. (Siegel–Shidlovskii の第 2 基本定理)
$f_1(z), f_2(z), \cdots, f_m(z)$ を，$f'_i = Q_{i,0} + \sum_{j=1}^{m} Q_{i,j} f_j$ $(Q_{i,j} \in \mathbb{C}(z))$ を満たす E-関数とし，$f_1(z), f_2(z), \cdots, f_m(z)$ が $\mathbb{C}(z)$ 上代数的独立であるとする．さらに T を $Q_{i,j}$ の分母の lcm とし，$\xi \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$ が $T(\xi) \neq 0$ を満たすとする．このとき，$f_1(\xi), f_2(\xi), \cdots, f_m(\xi)$ は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上代数的独立である．

系 12. (F. Lindermann)
$\xi \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$ とする．このとき，e^ξ は超越数である．

定理 6 (Siegel) の証明

$K_{\lambda_i}(\xi_j z)$ は，微分方程式 $y'' + \frac{2\lambda_i+1}{z} y' + \xi_j^2 y = 0$ をみたす．定理 7 より，$\{K_{\lambda_i}(\xi_j z),\ (K_{\lambda_i}(\xi_j z))'\}$ は $\mathbb{C}(z)$ 上代数的独立であるから，$\{K_{\lambda_i}(\xi_j z),\ K'_{\lambda_i}(\xi_j z)\}$ も $\mathbb{C}(z)$ 上代数的独立である．ここで，$y_{i,j,1} = K_{\lambda_i}(\xi_j z)$, $y_{i,j,2} = K'_{\lambda_i}(\xi_j z)$ とすると，$y'_{i,j,1} = y_{i,j,2}$, $y'_{i,j,2} = -\frac{2\lambda_i+1}{z} y_{i,j,2} - \xi_j^2 y_{i,j,1}$

1: 日大理工・院 (前)・数学

となるため，定理 11 より，任意の $\xi \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$ に対し，$K_{\lambda_i}(\xi_j\xi)$, $K'_{\lambda_i}(\xi_j\xi)$ $(i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n)$ は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上代数的独立である．ここで，$\xi=1$ とすれば，定理 6 が得られる．■

3. 定理 7 の証明

補題 13.　微分方程式

$$y''+a_iy'+b_iy=0 \tag{5}$$

$$(a_i,b_i\in\mathbb{C}(z),\ i=1,2,\cdots,n,\ n\geqq 1)$$

が次の 3 条件をみたすとする．

1° すべての i で，$\exists v_i\in\mathbb{C}(z)\ (v_i\not\equiv 0)\ s.t.\ v_i'+a_iv_i=0$

2° (5) の全ての非自明な解は，その導関数と $\mathbb{C}(z)$ 上代数的独立である．

3° $(5)_i$ の非自明な解 φ_i と $(5)_j$ の非自明な解 φ_j は，$u_1,u_2\in\mathbb{C}(z)$ と代数的関数 $w\ (w^2\in\mathbb{C}(z))$ を用いて，

$$\varphi_i=w(u_1\varphi_j+u_2\varphi_j') \tag{6}$$

と表すことができない．

このとき，$(5)_i$ の非自明な解を f_i と表すと，$f_1,f_1',f_2,f_2',\cdots f_n,f_n'$ は $\mathbb{C}(z)$ 上代数的独立である．

補題 14.　$k\in\mathbb{N}$ とする．関数 $z,f_1,f_2,\cdots,f_n\ (n\geqq 1)$ が $\mathbb{C}$ 上代数的独立ならば，$z^{1/k},f_1,f_2,\cdots,f_n\ (n\geqq 1)$ も $\mathbb{C}$ 上代数的独立である．

補題 15.　$a_1,a_2,\mu_1,\mu_2\in\mathbb{C}$，$\mu_i-\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$，$a_i\neq 0$ とする．φ_i を微分方程式 $y''+\frac{1}{z}y'+(a_i^2-\frac{\mu_i^2}{z^2})y=0$ の非自明な解とし，$\varphi_1=w(u_1\varphi_2+u_2\varphi_2')$ $(\exists u_i\in\mathbb{C}(z),\exists w\ s.t.\ w^2\in\mathbb{C}(z))$ をみたすとする．このとき，$a_1^2=a_2^2$ であり，$\mu_1+\mu_2$，$\mu_1-\mu_2$ の少なくとも一方は整数である．

<u>定理 7 の証明</u>

$f_{i,j}$ を $y''+\frac{2\lambda_i+1}{z}y'+\xi_j^2y=0$ の非自明な解とする．このとき，$z^{\lambda_i}f_{i,j}$ は $y''+\frac{1}{z}y'+(\xi_j^2-\frac{\lambda_i^2}{z^2})y=0$ をみたす．これは，補題 13 の条件 1° をみたす．ここで，この微分方程式が補題 13 の 3° を満たしていないとすると，補題 15 より，$\xi_{j_1}^2=\xi_{j_2}^2$ であり，$\lambda_{i_1}+\lambda_{i_2}\in\mathbb{Z}$ または $\lambda_{i_1}-\lambda_{i_2}\in\mathbb{Z}$ である．しかし，これは定理 7 の条件に反する．したがって，補題 13 より，$\left\{z^{\lambda_i}f_{i,j},(z^{\lambda_i}f_{i,j})'\right\}$ は $\mathbb{C}(z)$ 上代数的独立である．さらに，補題 14 により，$\left\{z^{1/k},\ z^{\lambda_i}f_{i,j},(z^{\lambda_i}f_{i,j})'\right\}$ $(k\in\mathbb{N})$ は $\mathbb{C}$ 上代数的独立である．特に，$k=\mathrm{lcm}(\lambda_i\text{の分母})$ とすれば，$\left\{f_{i,j},\ f_{i,j}'\right\}$ が $\mathbb{C}(z)$ 上代数的独立であることが示される．■

4. 補題 13 の証明

帰納法によって示す．$n=1$ のときは，補題 13 の条件 2° より正しい．次に $n=k-1$ まで正しいと仮定し，

$$\begin{cases}\mathscr{L}=\mathbb{C}(z) \quad (k=2)\\ \mathscr{L}=\mathbb{C}(z,f_3,f_3',\cdots,f_k,f_k') \quad (k\geqq 3)\end{cases}$$

とする．つまり，f_1,f_1',f_2,f_2' が $\mathscr{L}$ 上代数的独立であることを示せばよい．f_1,f_1' が $\mathscr{L}(f_2,f_2')$ 上代数的従属であるとすると，ψ_1 が $\mathscr{L}(\psi_2,\psi_2')$ 上代数的となるような $(5)_i$ の解 $\psi_i\ (i=1,2)$ が存在すると示せる．このことから，$\frac{\psi_1'}{\psi_1}\in\mathscr{L}_1$ が導ける．したがって，互いに素な多項式 $A,B\in\mathbb{C}(z)[x_{2,1},x_{2,2},x_{3,1},\cdots x_{k,2}]$ が存在して，$A(\psi_2,\psi_2',f_3,\cdots f_k')\psi_1-B(\psi_2,\psi_2',f_3,\cdots f_k')\psi_1'=0$ となる．$P_1=Ax_{1,1}-Bx_{1,2}$ として，

$$D=\frac{\partial}{\partial z}+\sum_{i=1}^{k}\left(x_{i,2}\frac{\partial}{\partial x_{i,1}}-(a_ix_{i,2}+b_ix_{i,1})\frac{\partial}{\partial x_{i,2}}\right) \tag{7}$$

を作用させると，ヒルベルトの零点定理より $DP_1=\omega_0P_1\ (\omega_0\in\mathbb{C}(z))$ が得られる．次に P_l を，$x_{l,1},\ x_{l,2}$ に着目したときに最大次数を持つ P_{l-1} の項の和 $(l=2,3,\cdots,k)$ として，$Q=P_k=A_1x_{1,1}-B_1x_{1,2}$ とおく．すると，A_1,B_1 が持つ変数は 1 組であることがいえる．これを $x_{2,1},x_{2,2}$ とする．さらに，ヒルベルトの零点定理より，$(5)_i$ の解 $\varphi_i\ (i=1,2)$ が存在して，$Q(\varphi_1,\varphi_1',\varphi_2,\varphi_2')=0$ であることがわかる．Q の作り方により，$\frac{\varphi_2'}{\varphi_2}$ は，

$$L_sx^s+L_{s-1}x^{s-1}+\cdots+L_0=0 \tag{8}$$

$(s=\deg A_1=\deg B_1,\ L_i\text{は}\varphi_1,\varphi_1'\text{の }\mathbb{C}(z)\text{ 上 1 次形式})$ をみたす．したがって，$\varphi_1,\varphi_1',\varphi_2,\varphi_2'$ は $\mathbb{C}(z)$ 上代数的従属であるため，$\exists M,N\in\mathbb{C}(z)[x_{1,1},x_{1,2}]\ s.t.\ \frac{\varphi_2'}{\varphi_2}=\frac{M(\varphi_1,\varphi_1')}{N(\varphi_1,\varphi_1')}$ となる．これを (8) に代入すると，$M|L_0,\ N|L_s$ が得られる．したがって，M,N は $\mathbb{C}(z)$ 上 1 次形式である．さらに，(8) より，$s=1$ であるから，

$$\varphi_2^2=\frac{S(\varphi_1,\varphi_1')}{T(\varphi_1,\varphi_1')} \tag{9}$$

$(\gcd(S,T)=1,\deg S-\deg T=2)$ が得られる．(9) に D を作用させると，$2TSM=TN(DS)-SN(DT)$ が得られるので，$T|N(DT)$, $S|N(DS)$ となる．ここで，$T=N^qT_1\ (T_1\in\mathbb{C}(z)[x_{1,1},x_{1,2}],\ \gcd(N,T_1)=1,q\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ とおき，$N(DT)$ を整理すると，$T_1\in\mathbb{C}(z)$ が得られる．同様に，$S=N^pS_1$ とおくと，$S_1\in\mathbb{C}(z)$ となる．いま，$\gcd(S,T)=1$ であるから，$p=2,q=0$ である．したがって，(9) より，$\varphi_2^2=\frac{S(\varphi_1,\varphi_1')}{T(\varphi_1,\varphi_1')}=\omega_2(N(\varphi_1,\varphi_1'))^2$ $(\omega_2\in\mathbb{C}(z))$ となり，$\varphi_2=\omega(n_1\varphi_1+n_2\varphi_2)$ $(\omega^2=\omega_2,\ n_i\in\mathbb{C}(z))$ となる．これは補題 13 の条件 3° に矛盾する．以上より，f_1,f_1',f_2,f_2' が $\mathscr{L}$ 上代数的独立であることが示されたので，$n=k$ のときも正しい．■

5. 参考文献

[1] C.-L. Siegel, Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen, reprint of Abh. Preuss. Akad. Wissen. Phys. Math. Kl. (1929-1930), no.1, p.1-70

[2] Andrei Borisovich Shidlovskii, Transcendental Numbers (Walter de Gruyter Studies in Mathematics, 12), Walter de Gruyter, Berlin, 1989.