

H3-6

ゲート下流の射流における乱流境界層の発達
Development of the boundary layer in supercritical flows below a gate

○佐藤柳言¹, 高橋正行²

*Ryugen Satoh¹, Masayuki Takahashi²

Abstract: In a supercritical flow below a sluice gate, a boundary layer develops from section of the vena contracta and reaches the water surface at the critical point. For the developing flow, the relation between the head loss and the energy thickness is clarified by using the energy equation in the boundary layer. The results of the analysis are in agreement with the experimental data.

1. まえがき

スルースゲート下流側に形成される射流は、縮流部 (vena contracta) で一様な流速分布となり、その下流側から乱流境界層が発達し、流下とともにその厚さを増し、やがて水面に到達する (Fig.1 参照)。乱流境界層が水面に到達した断面は critical point と呼ばれ、その上流側の乱流境界層が発達中の流れは developing flow と呼ばれ^[1] ている。

Ohtsu and Yasuda^[1] は、スルースゲート下流側の射流の水面形状と乱流境界層の発達状態を解析的に求める方法を示している。しかしながら、境界層が発達する開水路においてカルマンの運動量方程式^[2] と同じ結果になることは明確には示されていない。また、developing flow のエネルギー損失を解析的に求める方法については検討の余地がある。

本研究では、水平開水路に境界層近似されたレイノルズ方程式を用い、カルマンの運動量方程式と同じ結果になることを明示した。従来の developing flow の水面形と境界層の発達状態の解析方法^[1] に加えて、エネルギー消散厚を用いて developing flow のエネルギー損失を解析的に求める方法を導いた。また、これらの解析方法に対して実験による検証を行った。

2. 解析方法

2.1 水面形状と乱流境界層の発達状態

スルースゲートを有する長方形断面水平水路の射流を対象に、乱流境界層の発達状態を考慮して水深 h および境界層厚 δ を解析的に求める。流れは二次元的に取り扱えるものとし、乱流境界層外側の領域 ($\delta \leq y \leq h$; y は水路床を原点とする鉛直上向き座標) のエネルギー損失は無視できるものと仮定する。縮流部 (断面①, $x = 0$; x は縮流部を原点とする流下方向座標) と境界層が発達中の任意な断面 (断面②, $x = \ell$) との間の水面に沿う流線にベルヌーイの定理を適用すると、

$$U_0^2/(2g) + h_0 = U^2/(2g) + h \quad (1)$$

となる。ここに、 U_0 は縮流部の流速、 g は重力加速度、 h_0 は縮流部の水深、 U は断面②の $\delta \leq y \leq h$ の流速、 h は断面②の水深である。 $J = U_0/U$ として (1) を整理すると、

$$h/h_0 = \{F_0^2(1 - J^2)\} / 2 + 1 \quad (2)$$

となる。ここに、 $F_0 [= U_0/\sqrt{gh_0}]$ は縮流部のフルード数である。断面①②間の連続の式は、

$$U_0 h_0 = U(h - \delta_1) \quad (3)$$

で示される。ここに、 $\delta_1 [= \int_0^h (1 - \frac{\bar{u}}{U}) dy]$ は排除厚である。乱流境界層内の x 方向の時間平均流速 \bar{u} の分布は、

$$\bar{u}/U = (y/\delta)^{1/7} \quad \text{for } 0 \leq y \leq \delta \quad (4)$$

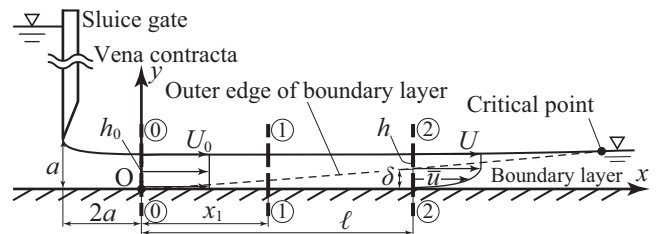


Figure 1. Definition sketch

の 1/7 乗則で近似されるものと仮定する。また、乱流境界層外の \bar{u} は一様分布であり、

$$\bar{u}/U = 1 \quad \text{for } \delta \leq y \leq h \quad (5)$$

となる。排除厚 δ_1 の定義と (4), (5) より、 $\delta_1 = \delta/8$ が得られ、これと (2), (3) を用いると、

$$\delta/h_0 = 8 \{ \{F_0^2(1 - J^2)\} / 2 + 1 - J \} \quad (6)$$

が得られる。

二次元非圧縮性流体で定流の場合の水平開水路における乱流境界層のレイノルズ方程式は境界層近似^[3] すると、

$$\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \quad (7)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y} - g \quad (8)$$

となる。ここに、 \bar{p} は時間平均圧力、 u' は x 方向の変動流速、 \bar{v} と v' は y 方向の時間平均流速と変動流速、 ρ は密度、 μ は粘性係数である。境界層内外において $\bar{v}^2 \approx 0$ として (8) を y 方向に積分すると、 $0 \leq y \leq h$ において圧力 \bar{p} は静水圧分布 $[\bar{p} = \rho g(h - y)]$ であることが示され、これを x で微分すると $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = g \frac{dh}{dx}$ が得られる。一方、(1) を x で微分し、水面に沿う流線の全水頭 E は一定で (1) が成立するため $\frac{dE}{dx} = 0$ を用いると $U \frac{dU}{dx} = -g \frac{dh}{dx}$ が得られる。これらを (7) に用いると、

$$\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \right) \quad (9)$$

となる。剪断応力 $\bar{\tau} = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'}$ とおいて (9) に代入し、 y 方向に h まで積分し、排除厚 δ_1 、運動量厚 $\delta_2 = \int_0^h \frac{\bar{u}}{U} \left(1 - \frac{\bar{u}}{U}\right) dy$ 、局所摩擦抵抗係数 $C_f' = \bar{\tau}_0 / (\rho U^2/2)$ ($\bar{\tau}_0$ は壁面剪断応力) を用いて整理すると、

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{2\delta_2 + \delta_1}{U} \frac{dU}{dx} = \frac{C_f'}{2} \quad (10)$$

が得られ、(10) は zero pressure gradient で導出されているカルマンの運動量方程式^[2] と同一表示となる。 C_f' は流

速分布が 1/7 乗則で近似される^[1]ため、

$$C_f' = 0.0592 (\rho U x / \mu)^{-1/5} \quad \text{for } 3 \times 10^5 \leq \rho U x / \mu \leq 1 \times 10^7 \quad (11)$$

のように示される^[2]。(10)に(11)を代入し、縮流部① ($x = 0, U = U_0$)の境界条件のもとで解くと、

$$\frac{x}{h_0} = 194R^{1/4} \left\{ \frac{37}{99} F_0^2 \left(1 - J^{-1/5} \right) + \frac{23}{9} \left(2 + F_0^2 \right) \left(J^{-1/5} - 1 \right) - \frac{8}{9} \left(1 - J^{4/5} \right) \right\}^{5/4} \quad (12)$$

が得られる^[1]。ここに、 $R [= \rho q / \mu]$ はレイノルズ数、 q は単位幅流量である。

2.2 エネルギー損失

断面①②間 (**Fig.1** 参照)のエネルギー損失を求めるため、(9)の両辺に \bar{u} を乗じてエネルギー方程式とし、 y 方向に h まで積分すると、

$$\frac{\rho}{2} \frac{d}{dx} \left(U^3 \delta_3 \right) = \int_0^h \bar{\tau} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dy \quad (13)$$

となる^[3]。ただし、 δ_3 はエネルギー消散厚であり、

$$\frac{1}{2} \rho U^3 \delta_3 = \frac{1}{2} \int_0^h \rho \bar{u} \left(U^2 - \bar{u}^2 \right) dy \quad (14)$$

で定義される。(13)で $\bar{\tau} = -\rho \bar{u}'v'$ として断面①②間で x 方向に積分すると、

$$\left(\rho U^3 \delta_3 / 2 \right)_{\text{at } ②} - \left(\rho U^3 \delta_3 / 2 \right)_{\text{at } ①} = \text{Pro.}_{① \sim ②} \quad (15)$$

となる。ここに、 $\text{Pro.}_{① \sim ②}$ は断面①②間の乱れの生成項である。変動流のエネルギー方程式から得られる断面①②間の乱れの消散項を $\text{Dis.}_{① \sim ②}$ で表し、平板上の乱流境界層の乱れエネルギーの収支^[4]と類似と考えると、 $\text{Pro.}_{① \sim ②} \approx \text{Dis.}_{① \sim ②} = \text{断面①②間の損失エネルギー}$ となる。(15)の右辺を損失エネルギーとして両辺を水頭で表示するため、両辺を $\rho g q$ で除すと、

$$\left\{ U^3 \delta_3 / (2gq) \right\}_{\text{at } ②} - \left\{ U^3 \delta_3 / (2gq) \right\}_{\text{at } ①} = (h_L)_{① \sim ②} \quad (16)$$

となる。ここに、 $(h_L)_{① \sim ②}$ は断面①②間の損失水頭である。 $U^3 \delta_3 / (2gq)$ は(14)、断面平均流速 V 、エネルギー補正係数 α を用いて整理すると $U^3 \delta_3 / (2gq) = \{ U^2 / (2g) - \alpha V^2 / (2g) \}$ で示される。断面①と縮流部①が一致している ($x_1 = 0$)とき、 $\delta_3 \approx 0$ ($U_1 = U_0 = V_1, \alpha_1 = 1$)であることから、

$$(h_L)_{① \sim ②} = U^2 / (2g) - \alpha V^2 / (2g) \quad (17)$$

となる。 $V = \frac{1}{A} \int_A \bar{u} dA$ (A は流積)および、乱流境界層内 ($0 \leq y \leq \delta$)では(4)、乱流境界層外 ($\delta \leq y \leq h$)では(5)を用いると、

$$V/U = 1 - (\delta/h)/8 \quad (18)$$

となる。(4)、(5)、(18)と $\alpha = \int_0^h \left(\frac{\bar{u}}{V} \right)^3 \frac{dy}{h}$ を用いると、

$$\alpha = \left\{ 1 - \frac{3}{10} \left(\frac{\delta}{h} \right) \right\} / \left\{ 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\delta}{h} \right) \right\}^3 \quad (19)$$

となる。(17)の両辺を $U^2 / (2g)$ で除し、(18)、(19)を用いると、

$$\frac{(h_L)_{① \sim ②}}{U^2 / (2g)} = 1 - \left\{ 1 - \frac{3}{10} \left(\frac{\delta}{h} \right) \right\} / \left\{ 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\delta}{h} \right) \right\} \quad (20)$$

が得られる。

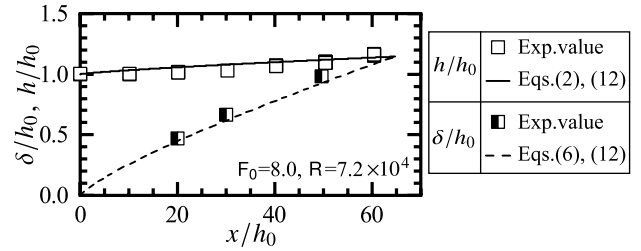


Figure 2. Water surface profile and boundary layer thickness

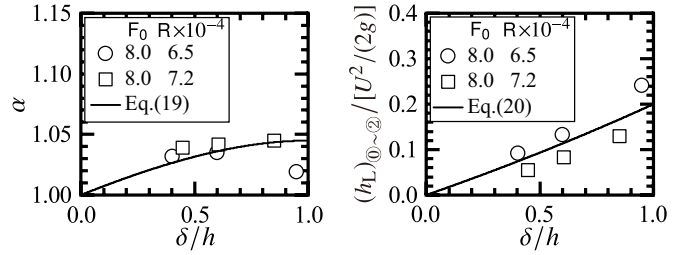


Figure 3. Energy correction

coefficient

Figure 4. Head loss

coefficient

3. 実験

実験は、スルースゲートを有する水路幅 $B = 0.4 \text{ m}$ の長方形断面水平水路を用いて、 $F_0 = 8.0$ で $R = 6.5 \times 10^4$ または 7.2×10^4 になる射流が形成されるように流量 Q 、ゲートの開口高 a を調整して行った。なお、縮流部はゲートから下流に $2a$ の位置とした^[1]。 x 方向の時間平均流速 \bar{u} は次元レーザードップラー流速計を用いて測定された (採取時間 164 sec, 採取間隔 25 Hz)。時間平均水深 \bar{h} は超音波水位計を用いて測定された (採取時間 200 sec, 採取間隔 100 Hz)。水深 h はポイントゲージを用いて測定された。なお、 δ は \bar{u} と h の実測値より排除厚 δ_1 を求め、 $\delta = 8\delta_1$ の関係に代入して算出されている。

4. 結果

与えられた F_0 と R に対する水面形と境界層の発達状態を **Fig.2** に示す。 h/h_0 および δ/h_0 の計算値と実験値はそれぞれよく一致している。

与えられた F_0 と R に対するエネルギー補正係数 α を **Fig.3** に示す。実験値は \bar{u} と h の実測値より求められている。また、与えられた F_0 と R に対する相対損失水頭 $(h_L)_{① \sim ②} / [U^2 / (2g)]$ を **Fig.4** に示す。実験値は(17)に連続の式を用いて $(h_L)_{① \sim ②} = \{ q^2 / (2gh_0^2) - \alpha q^2 / (2gh^2) \}$ とし、前述の α と q, h_0, h の実測値を代入して得られる $(h_L)_{① \sim ②}$ と U の実測値を用いて求められている。**Fig.3** および **Fig.4** に示されるように、 α と $(h_L)_{① \sim ②} / [U^2 / (2g)]$ の計算値と実験値はそれぞれよく一致している。

参考文献

- [1] Ohtsu, I. and Yasuda, Y.: Characteristics of supercritical flow below sluice gate, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.120, No.3, pp.332–346, 1994.
- [2] Schlichting, H.: *Boundary layer theory*, McGraw-Hill, 1957.
- [3] Appel, D. W., Hubbard, P. G., Landweber, L., Laursen, E. M., MaNown, J. S., Rouse, H., Siao, T. T., Toch, A., and Yih, C.: *Advanced mechanics of fluids*, John Wiley and Sons, 1959.
- [4] Klebanoff, P. S.: Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient, Technical Report 1247, National Advisory Committee for Aeronautics, 1955.