

H3-8

階段状水路における nonaerated skimming flow の乱流境界層の発達状態
Boundary layer development of nonaerated skimming flow in a stepped channel

○梶原大地¹, 高橋正行²*Daichi Kajiwara¹, Masayuki Takahashi²

Abstract: An analytical equation for calculation of boundary layer development in the stepped channel has not been established. In this paper, for the nonaerated skimming flow region, analytical equations for calculation of boundary layer thickness and water depth were developed, and boundary layer development were calculated using these equations.

1 まえがき

階段状水路は、ダムや堰などの落差を伴う構造物や急傾斜の水路を流下する高速流を斜面上で減勢させる方法として利用されている^{[1],[2]}。階段状水路において形成される流況は、水路傾斜角度 θ 、相対ステップ高さ S/d_c (S : ステップ高さ, d_c : 限界水深 [$d_c = \sqrt[3]{q^2/g}$], g : 重力加速度, q : 単位幅流量) によって変化する。階段状水路で比較的大流量の越流が生じる場合には skimming flow (階段の隅角部で常に渦の形成が認められる流況) が形成^[1]される。階段状水路に流入した流れでは乱流境界層が発達し、乱流境界層が水面に到達すると水面から空気が混入しはじめる。この位置は inception point (以下 I.P. と略す) と呼ばれ、I.P. の上流側は nonaerated skimming flow, 下流側は aerated skimming flow に分類される。I.P. より下流側では空気混入不等流となり、ある程度の距離を流下すると擬似等流空気混入流となる。

Takahashi and Ohtsu^[2] は階段状水路の擬似等流空気混入流における流水抵抗, 空気混入率, 水深, 流速特性を明らかにした。また, 高橋ら^[3] は aerated flow の不等流の水面形方程式を導出した。Aerated flow の不等流区間の水面形方程式を用いて解析的に水深と空気混入率を求めるためには、境界条件として I.P. までの流下距離と I.P. での水深が必要である。すなわち, nonaerated flow の水深, 流速, 境界層の発達状態の解明が求められている。

本研究では、階段状水路の nonaerated skimming flow を対象に境界層厚と水深の流下方向変化を示す関係式を解析的に導いた。また, nonaerated skimming flow の境界層厚と水深を解析的に求めた値と実験値との比較を行った。

2 解析方法

Fig.1 に示されるような、堰上流側の断面①と階段状水路始端の断面②との間においてエネルギー損失は無視できること^[4]から、断面②における全水頭は断面①の全水頭と等しい。また、境界層外では、エネルギー損失は無視できる^[5]ものとして断面②と断面③の間の自由水面の流線に沿って Bernoulli の定理を適用すると、

$$1.5d_c + x \sin \theta = d \cos \theta + U^2/2g \quad (1)$$

が得られる。ここに、 d は断面③の水深, U は断面③の $\delta \leq y \leq d$ の流速である。ただし, Fig.1 の断面③のステップ水平部を通る水平面を水平基準面としている。階段状水路 edge 断面における乱流境界層内の流速分布は、

$$u/U = (y/\delta)^{1/N} \quad \text{for} \quad 0 \leq y \leq \delta \quad (2)$$

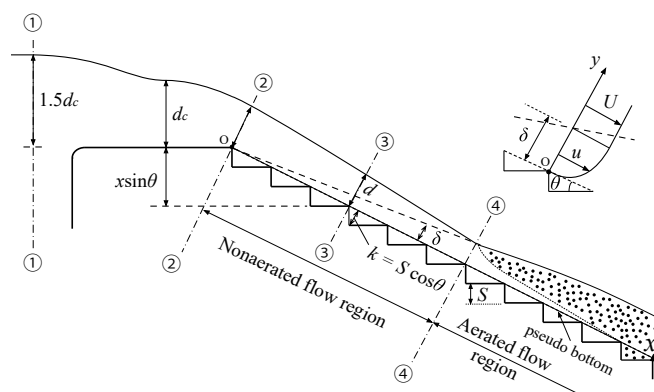


Figure 1: Definition sketch

の $1/N$ 乗則で近似されるものと仮定する。また、境界層外では一様流速分布であり、

$$u/U = 1 \quad \text{for} \quad \delta \leq y \leq d \quad (3)$$

となる。ここで、 y は仮想底面を原点とする仮想底面に垂直上向きの座標, u は時間平均された流下方向流速である。排除厚 δ_1 を、

$$\delta_1 = \int_0^d \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (4)$$

とすると、単位幅流量 q は、(2), (3), (4) より

$$q = \int_0^d u dy = U \left(d - \frac{1}{1+N} \delta \right) = U(d - \delta_1) \quad (5)$$

となる。また、(5) を U について整理すると、

$$U = q \left/ \left(d - \frac{1}{1+N} \delta \right) \right. = q / (d - \delta_1) \quad (6)$$

となる。(6) を (1) に代入し、両辺を流下方向の座標 x で微分して、水面勾配 dd/dx について整理すれば、

$$\frac{dd}{dx} = \frac{\sin \theta \left(\frac{d}{d_c} - \frac{1}{1+N} \frac{\delta}{d_c} \right)^3 - \frac{1}{1+N} \frac{d\delta}{dx}}{\cos \theta \left(\frac{d}{d_c} - \frac{1}{1+N} \frac{\delta}{d_c} \right)^3 - 1} \quad (7)$$

が得られる。

圧力 p は $0 \leq y \leq d$ で静水圧分布するものと仮定して、edge 断面間の境界層外の流体を検査領域に選んで流下方

向に運動量方程式を適用すると、

$$U \frac{dU}{dx} = g \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{dd}{dx} \right) \quad (8)$$

が得られる。また、仮想底面にせん断応力 τ_0 が生じるものと考えて、edge 断面間の境界層内の流体を検査領域に選んで流下方向に運動量方程式を適用すると、

$$\frac{\tau_0}{\rho} = g \delta \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{dd}{dx} \right) + \frac{d}{dx} \int_0^\delta u(U-u)dy - \frac{dU}{dx} \int_0^\delta udy \quad (9)$$

となる。運動量厚 δ_2 、

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy \quad (10)$$

と (4), (8), (9) を用いれば、

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} \equiv \frac{1}{2} C_f = \frac{d\delta_2}{dx} + \left(\frac{\delta_1 + 2\delta_2}{U} \right) \frac{dU}{dx} \quad (11)$$

が得られる。ここに、 $C_f (= \tau_0 / (\rho U^2 / 2))$ は局所摩擦係数である。(11) より、ゼロ圧力勾配の平板で示されているカルマンの運動量方程式^[6]と同じ結果が階段状水路でも得られた。(2), (3), (4), (10) を用いると、(11) は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} C_f &= \frac{N}{(N+1)(N+2)} \frac{d\delta}{dx} \\ &+ \left(1 + \frac{N+2}{2N} \right) \frac{N}{(N+1)(N+2)} \frac{\delta}{U^2} \frac{dU^2}{dx} \end{aligned} \quad (12)$$

となる。(1) を U^2 について整理し、両辺を x で微分すれば、

$$\frac{dU^2}{dx} = 2g \left(\sin \theta - \frac{dd}{dx} \cos \theta \right) \quad (13)$$

となる。 U^2 について整理した (1) と (13) を (12) に代入し、 $d\delta/dx$ について整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dx} &= \frac{1}{2} \frac{(N+1)(N+2)}{N} C_f \\ &- \left(1 + \frac{N+2}{2N} \right) \cdot \frac{\delta}{x} \cdot \frac{\sin \theta - \frac{dd}{dx} \cos \theta}{\sin \theta + \frac{3}{2} \frac{dc}{x} - \frac{d}{x} \cos \theta} \end{aligned} \quad (14)$$

が得られる。

以上より、 C_f の値が定められれば、階段始端 $x/d_c = 0$ の水深として広頂堰の brink depth $d/d_c \approx 0.7$ と境界層厚 $\delta/d_c = 0$ を境界条件として与えて (7) と (14) を数値積分することで、任意な x/d_c での d/d_c と δ/d_c とが求められる。

3 実験

実験は、水路幅 $B = 0.4$ m、水路傾斜角度 $\theta = 19^\circ$ 、ステップ高さ $S = 1.5$ cm の階段状水路 (Fig.1) を対象に、単位幅流量 $q = 0.0643$ m²/s の水を通水して行われた。水路中央面の水深 d と x 軸方向の流速 u はエッジ断面 (Fig.1) を対象に測定された。流速 u の測定にはピトー管 (管径 3mm:JIS-B8330 規格)、水深 d の測定にはポイントゲージを用いた。

4 結果

$\theta = 19^\circ$, $S/d_c = 0.2$ の場合、流速 u の測定値より $N \approx 5.5$ であることが確かめられた。 $N \approx 5.5$, δ , d の実測値と実測値を線型補間して得た $d\delta/dx$, dd/dx を (14) に与えると C_f の実験値が求められる。 C_f の値を相対距離 $x/S \cos \theta$ との関係で整理した結果を Fig.2 に示す。また、 $N \approx 5.5$, C_f の値と $x = 0$ における δ と d の境界条件を (7), (14) に与え、数値積分して求めた δ と d の計算値を Fig.3 の各線に示す。Fig.3 に示されるように、境界層厚 δ と水深 d の計算値は実測値を概ね満足した。

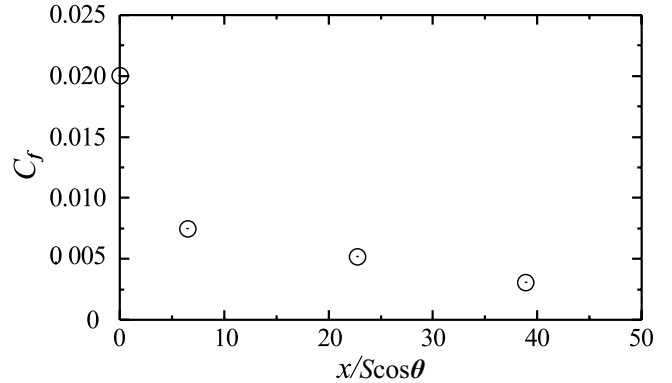


Figure2: Local skinfriction coefficient for $\theta = 19^\circ$ and $S/d_c = 0.2$

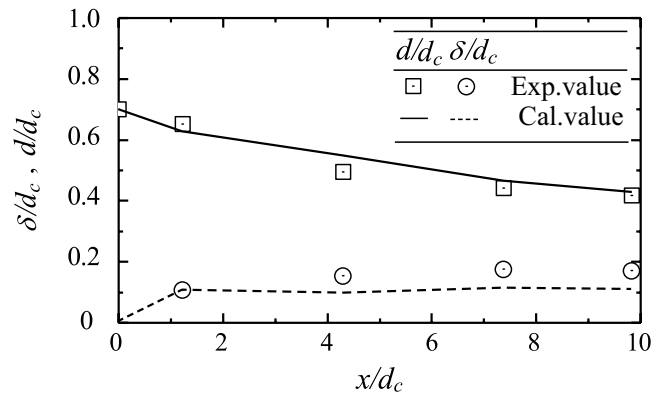


Figure3: Boudary layer thickness and water depth

参考文献

- [1] Ohtsu, I., Yasuda, Y., and Takahashi, M.: Flow characteristics of skimming flows in stepped channels., *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.130, No.9, pp.860–869, 2004.
- [2] Takahashi, M. and Ohtsu, I.: Aerated flow characteristics of skimming flow over stepped chutes, *Journal of Hydraulic Research*, Vol.50, No.4, pp.427–434, 2012.
- [3] Takahashi, M. and Ohtsu, I.: Analysis of nonuniform aerated skimming flows on stepped channels, *The 5th IAHR International Symposium on Hydraulic Structures (ISHS2014)*, DOI:10.14264/uql.2014.18, 2014.
- [4] 本間仁, 安芸皎一編: 物部水理学, pp. 233–234, 岩波書店, 1962.
- [5] Iwasa, Y.: Boundary layer growth of open channel flows on a smooth bed and its contribution to practical application to channel design, *Memoirs, Faculty of Eng., Kyoto Univ.*, Vol.19, No.3, pp.229–254, 1957.
- [6] Schlichting, H.: *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, 4th edition, 1960.