O-10

AdS_2 時空と SYK 模型の低エネルギー極限における類似性
Similarity between AdS_2 spacetime and SYK model in low energy limit

○木村勇貴[1], 三輪光嗣[2]
*Yuki Kimura[1], Akitsugu Miwa[2]

Abstract：Abstract: In this presentation, we review an aspect of similarities between gravitational theory on the AdS_2 spacetime and the SYK model. The SYK model describes randomly interacting fermions, and the model is suggested by Kitaev in 2015 as a candidate for a dual of some gravitational theory. We see that the low energy effective theories of both of these two theories are described by the Schwarzian derivative.

1. 導入

本講演では 2 次元の anti-de Sitter 時空（AdS_2 時空）と Kitaev によって提案された Sachdev-Ye-Kitaev 模型（SYK 模型）との類似性について議論する．AdS 時空とは負の定数スカラー曲率を持つ時空である．AdS_2 時空を研究する動機として，任意の次元のブラックホールのホライズン近傍が AdS_2 時空によって記述されることが挙げられる．そのため AdS_2 時空の解析はブラックホールの研究に利用されている．

SYK 模型とは，2015 年に Kitaev によって提唱されたフェルミオンがランダムに相互作用する模型である [1]. ここで言うランダムとは，どのフェルミオンも一定の相互作用をするのではなくフェルミオンの選び方によって相互作用する強さがランダムに異なることを指す．SYK 模型の低エネルギーの有効理論はある極限での 2 次元の重力の有効理論と類似すると考えられている．

重力を含まない場の量子論が重力理論を表すと予想されており，その対応はホログラフィ原理と呼ばれている．この SYK 模型はその予想の 1 例として考えられている．重力理論と対応した場の量子論が存在すれば重力理論の理解が進むことになる．

今回は [2,3] の論文に沿って，まず Jackiw-Teitelboim 理論（JT 理論）を用いて重力理論を説明し，次に SYK 模型について説明して 2 つの理論の類似点を議論する．

2. JT 理論

2 次元重力理論の Jackiw–Teitelboim 理論（JT 理論）について説明する．JT 理論の作用は以下で与えられる [2,3,4].

$$I_{JT} = -\frac{1}{16\pi G}\left[\int_M d^2x\sqrt{g}\phi(R+2) + 2\int_{\partial M} du\sqrt{h}\phi_b K\right] \quad (1)$$

第 1 項は，AdS_2 時空の内部 M での積分で，g は計量 $g_{\mu\nu}$ の行列式，ϕ はディラトン場，R はスカラー曲率である．第 2 項は境界 ∂M での積分で，u は境界に沿ったパラメータ，h は境界上の誘導計量，ϕ_b は境界での ϕ の値，K は外部曲率である．

この理論が AdS 時空を記述することは，(1) 式の ϕ に対する運動方程式より，スカラー曲率が負の定数 ($R=-2$) となることから分かる．AdS_2 時空の計量はユークリッド化された時間座標 t と空間座標 z を用いて以下のように書ける．

$$ds^2 = \frac{dt^2+dz^2}{z^2}$$

扱う AdS_2 時空の境界は u によるパラメータ表示 $(t(u), z(u))$ で記述されるとする．(1) 式より計量 $g_{\mu\nu}$ に対する運動方程式を求めると ϕ が境界 $(z\to 0)$ で発散することが分かるので，

$$\phi_b = \frac{\phi_r(u)}{\epsilon} \quad (\epsilon \to 0)$$

と定義する．また，スカラー曲率が $R=-2$ であることから，(1) 式の第 1 項は消去して第 2 項の境界項のみ考える．

$$I_{JT} = -\frac{1}{8\pi G}\int_{\partial M} du\sqrt{h}\,\frac{\phi_r(u)}{\epsilon}K$$

次に，AdS_2 時空の境界の誘導計量 $\left(h = \dfrac{t'^2+z'^2}{z^2}\right)$ に対して以下の条件を与える．

$$h = \frac{1}{\epsilon^2}$$

この条件より，$z(t) = \epsilon t'(u) + O(\epsilon^3)$ となる．この式を用いると $K = 1 + Sch(t,u)$ となる．$Sch(t,u)$ はシュワルツ微分と呼ばれ，次式で与えられる．

$$Sch(t,u) = -\frac{1}{2}\left(\frac{t''}{t'}\right)^2 + \left(\frac{t''}{t'}\right)'$$

得られた結果を I_{JT} に代入し $t(u)$ に依存しない発散項を無視すると以下の有限の作用が得られる．

$$I_{JT} = -\frac{1}{8\pi G}\int_{\partial M} du\,\phi_r(u) Sch(t,u)$$

[1] 日大理工・院 (前)・物理　[2] 日大理工・教員・物理

以上より, 境界で条件を与えた AdS_2 時空の作用は境界での力学変数 $t(u)$ によって記述され，その値は AdS_2 時空の境界の形状によって変化することが分かった.

3. SYK 模型

Sachdev-Ye-Kitaev 模型（SYK 模型）について説明する [1,3,5,6]．SYK 模型とはフェルミオン $\psi_i (i = 1, \cdots, N)$ がランダムに相互作用する模型であり，ハミルトニアンは次式で与えられる [1].

$$H = i^{q/2} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_q \le N} J_{i_1 \cdots i_q} \psi_{i_1} \cdots \psi_{i_q}$$

SYK 模型の特徴は，相互作用する強さを表す $J_{i_1 \cdots i_q}$ が平均値が 0 で標準偏差が $\sigma = \sqrt{\frac{(q-1)!}{N^{q-1}}} J$ のガウス分布に従う確率変数となることである．このため，物理量を求める際 $J_{i_1 \cdots i_q}$ について平均をとることになる.

この SYK 模型の large N 極限を考える．ファインマンダイアグラムを用いてフェルミオンの 2 点関数 $G(u_1, u_2)$ を摂動論的に計算することで $G(u_1, u_2)$ の N 依存性を求めることができる．large N 極限をとるので N 依存が大きいダイアグラムのみ G に寄与する．ここで

$$\Sigma(u_1, u_2) = J^2 G^{q-1}(u_1, u_2)$$

を導入すると，G に寄与するダイアグラムが満たす方程式は以下のように書き下せる.

$$G(u_1, u_2) = [\delta(u_1 - u_2)\partial_{u_2} - \Sigma(u_1, u_2)]^{-1} \equiv [\partial_u - \Sigma]^{-1}$$

次に，フェルミオン ψ_i で記述される作用を G，Σ に対応するマスターフィールド ζ，ξ を用いて書き換えると以下となる [5].

$$I[\zeta, \xi] = -\frac{1}{2} \,\mathrm{logdet}\, (\partial_u - \xi) + \frac{1}{2} \iint du_1 du_2 \left(\xi\zeta - \frac{1}{q} J^2 \zeta^q \right) \quad (2)$$

この作用から導出されるマスターフィールドの運動方程式は上で述べたダイアグラムから決まる G，Σ が従う方程式と一致する.

この (2) 式の作用の低エネルギー（IR）極限 ($J \gg \partial_u$) を考える．この極限では ζ，ξ の従う方程式

$$\int du_2 \, \zeta(u_1, u_2)\xi(u_2, u_3) = -\delta(u_1 - u_3)$$
$$\xi(u_1, u_2) = J^2 \zeta^{q-1}(u_1, u_2)$$

はパラメータを $u \to f(u)$ と取り換えると同時に ζ，ξ を再定義する

$$\zeta(u_1, u_2) \to [f'(u_1) f'(u_2)]^{1/q} \, \zeta(f(u_1), f(u_2))$$
$$\xi(u_1, u_2) \to [f'(u_1) f'(u_2)]^{1-1/q} \, \xi(f(u_1), f(u_2))$$

の変換の下で不変である．しかし IR 極限ではない時，(2) 式は ∂_u によってその対称性を持たない．つまり対称性が破れていることが分かる．そこで ∂_u が小さいとした時，∂_u について展開することで作用の形がどのようになっているのか確かめる．有効作用を以下で与える [3].

$$I_{eff} = -\frac{1}{2} \mathrm{logdet}(\partial_u - \xi_*^f) + \frac{1}{2} \mathrm{logdet}(\partial_u - \xi_*)$$

ξ_* は鞍点での ξ，ξ_*^f はパラメータを $f(u)$ に取り替えたときの ξ_* である．ここで有効作用 I_{eff} を ∂_u について展開すると主要部は,

$$N I_{eff} \sim \frac{N}{J} \int du \, Sch(f, u_1)$$

となりシュワルツ微分で与えられる．いま large N 極限を考えているが, IR 極限であり J も大きくとるため，この有効作用は対称性と関係のないゆらぎと比べて寄与が大きいことが分かる.

以上より，∂_u が小さい時 SYK 模型の作用は破れた対称性を表す $f(u_1)$ によって記述されることが分かった.

4. まとめと今後の課題

AdS_2 時空と SYK 模型について紹介し，境界が十分遠方に存在するような条件を与えた重力理論での有効作用と，IR 極限での SYK 模型の有効作用がシュワルツ微分で与えられることを議論した.

シュワルツ微分の導出に関してはここで紹介した以外の議論も存在するため，今後はそれらの関連性などを考察したい．また，SYK 模型は相関関数のカオス的振る舞いなど，様々な側面について重力理論との対応が議論されており，それらの理解と考察を進めたい.

5. 参考文献

[1]A.Kitaev,“A simple model of quantum holography”, http : //online.kitp.ucsb.edu/online/entangled15/kitaev/, http : //online.kitp.ucsb.edu/online/entangled15/kitaev2/.
[2]J.Maldacena, D.Stanford, and Z.Yang, PTEP, no.12, 12C104(2016).
[3]GáborSárosi, PoSModave2017, 001(2018).
[4]A.Almheiri and J.Polchinski, JHEP1511, 014(2015).
[5]J.Maldacena and D.Stanford, Phys.Rev.D94, no.10, 106002(2016).
[6]S.Sachdev and J.Ye, Phys.Rev.Lett.70, 3339(1993).