O-11

AdS 時空および漸近的 AdS 時空の安定性について
Stability of AdS spacetime and asymptotically AdS spacetime

○吉田 大地[1], 三輪 光嗣[2]
*Daichi Yoshida[1], Akitsugu Miwa[2]

Abstract : We review a phenomenon called the Hawking-Page phase transition and recent developments in the subject. The Hawking-Page phase transition is a phenomenon in which stabilities of the AdS spacetime and the Schwarzschild AdS black hole interchange when the temperature is changed. A correspondence between the Hawking-Page phase transition and the confined/deconfined phase transition is one example of the AdS/CFT correspondence and has been discussed in the context of the CFT on S^{d-2}. Recently, a coordinate transformation which changes the AdS boundary from $S^1 \times S^{d-2}$ to $S^1 \times \mathcal{H}^{d-2}/\mathbb{Z}$ was proposed. The stabilities of geometires with hyperbolic boundarys and interpretations of them in the CFT on $\mathcal{H}^{d-2}/\mathbb{Z}$ were discussed.

１．導入

弦理論の観点から $N \to \infty$ における $SU(N)$ ゲージ理論と超重力理論の古典近似が対応することが示唆されており，AdS/CFT 対応と呼ばれる．その一端を見ることができる重力理論側の 1 つの例として，Hawking-Page 相転移がある [1]．これは（漸近的）AdS 時空の温度により，複数存在する解の相対的な安定性が変化する現象である．これらの時空は，バルクが d 次元の場合，無限遠境界で $S^1 \times S^{d-2}$ の幾何を持つ．ここで，S^{d-2} は $d-2$ 次元球面を表す．この相転移と，境界に住むゲージ理論（CFT）側の閉じ込め/非閉じ込め相転移に対応があることは，これまでに調べられてきた [2,3]．

Horowitz らは Weyl 変換によって $S^1 \times S^{d-2}$ が $S^1 \times \mathcal{H}^{d-2}/\mathbb{Z}$ に変わることに着目し，$\mathcal{H}^{d-2}/\mathbb{Z}$ 上の CFT にも同様の相転移が存在することを示唆した [4]．ここで，$\mathcal{H}^{d-2}/\mathbb{Z}$ は周期化された $d-2$ 次元双曲空間を表す．また，座標変換によって（漸近的）AdS 時空の境界を $S^1 \times S^{d-2}$ から $S^1 \times \mathcal{H}^{d-2}/\mathbb{Z}$ に変えて時空の安定性を評価し，後者の場合でも重力理論側の相転移が同様に存在することを示した．以下では，これらの研究を簡単に紹介する．

２．Hawking-Page 相転移 [1]

時間 χ 方向がユークリッド化された Einstein 方程式の解である（漸近的）AdS 時空の計量は次式で与えられる．

$$ds^2 = f(r)d\chi^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{1}$$

$$f(r) \equiv r^2 + 1 - \frac{2m}{r} \tag{2}$$

この計量は $m = 0$ で AdS 時空である．$m \neq 0$ では $f(r_h) = 0$ の位置にホライズンを持ち，r が十分遠方で AdS 時空に漸近するブラックホール (BH) 解である．この BH 解は Schwarzschild AdS BH と呼ばれている．χ 方向は周期 L_χ で周期化されており，したがって，時空の逆温度は L_χ である [5]．Schwarzschild AdS BH ではホライズンで円錐特異点が現れないようにするための条件を課し，L_χ が

$$L_\chi = \frac{4\pi r_h}{1+3r_h^2} \tag{3}$$

と r_h で決まる．また，m も $f(r_h) = 0$ から

$$m = \frac{1}{2}r_h(1+r_h^2) \tag{4}$$

のように r_h で書ける．AdS 時空の作用の値を基準に Schwarzschild AdS BH 時空の作用の値が定まり，特にこの基準を 0 とし，r 一定にカットオフを導入して計算すると，主要部は

$$I = \frac{L_\chi(m-r_h^3)}{2G} = \frac{\pi}{G}\frac{r_h^2(1-r_h^2)}{1+3r_h^2} \tag{5}$$

となる．よって，分配関数 $Z \equiv \exp(-I)$ は [5]

$$Z = \exp(-I) = \exp\left[-\frac{\pi}{G}\frac{r_h^2(1-r_h^2)}{1+3r_h^2}\right] \tag{6}$$

となる．これより，自由エネルギー F，エネルギー期待値 $\langle E\rangle$，比熱 C をそれぞれ計算すると

$$F \equiv -L_\chi \log Z = \frac{4\pi^2}{G}\frac{r_h^3(1-r_h^2)}{(1+3r_h^2)^2} \tag{7}$$

$$\langle E\rangle \equiv -\frac{\partial}{\partial L_\chi}\log Z = \frac{1}{2}r_h(1+r_h^2) = m \tag{8}$$

$$C \equiv -L_\chi^2\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial L_\chi} = -\frac{2\pi r_h^2(1+3r_h^2)}{1-3r_h^2} \tag{9}$$

が得られる．AdS 時空では作用の値が 0 であることから，自由エネルギーは 0 である．Hawking-Page 相転移は逆温度 L_χ の値に応じて安定な時空構造が変化する現象であり，以下では文献 [1] の解析結果を簡単にまとめる．

まず $L_\chi > \beta_0 = 2\pi/\sqrt{3}$ のとき，$m \neq 0$ の解は逆温度の上限を超える領域であるため存在せず，時空は $m = 0$ の AdS 時空となる．次に $\beta_0 > L_\chi$ の場合では $m \neq 0$ の解もある与えられた逆温度に対し 2 つ存在し，以下では r_h の小さな方を small BH，大きな方を large BH と呼ぶ．small BH は負の比熱を持つため，外部の方が高温のとき，

[1] 日大理工・院 (前)・物理　[2] 日大理工・教員・物理

熱平衡状態へ遷移しようとすると small BH にエネルギーが流入し，その結果 small BH の温度はむしろ下降して温度差が開き熱平衡状態から遠ざかる．逆に外部の方が低温であるとき，small BH からエネルギーが放出され，small BH の温度は上昇するため，同様に熱平衡状態から遠ざかる．したがって，small BH は不安定である．large BH は正の比熱を持っているため，このようなことは起きない．よって，以下では AdS 時空解と large BH についての安定性を見ていく．$\beta_0 > L_\chi > \beta_1 = \pi$ のとき，自由エネルギーは large BH よりも AdS 時空解の方が小さく，AdS 時空解がより安定となる．$\beta_1 > L_\chi$ のとき，large BH の方がより小さな自由エネルギーを持ち，逆に AdS 時空解よりも安定となる．

３．球面から双曲空間への変換

前節で紹介した (1) 式で記述される時空における Hawking-Page 相転移と，r 一定の無限遠境界上のゲージ理論側における閉じ込め/非閉じ込め相転移との対応は調べられてきた [2,3]．この境界上の計量は

$$ds^2_{S^1\times S^2} = r^2(d\chi^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{10}$$

と与えられる．(10) 式に対して全体を $\sin^2\theta$ で割る Weyl 変換を行うと，この計量の幾何は以下のように $S^1\times S^2$ から $S^1\times\mathcal{H}^2/\mathbb{Z}$ となる．

$$\frac{ds^2_{S^1\times S^2}}{\sin^2\theta} = r^2\left(\frac{d\chi^2+d\theta^2}{\sin^2\theta}+d\phi^2\right)(= ds^2_{S^1\times\mathcal{H}^2/\mathbb{Z}}) \tag{11}$$

この変換では，χ 方向の S^1 が変換後は双曲空間 $\mathcal{H}^2/\mathbb{Z}$ の一部となり，また，球面 S^2 の一部であった ϕ 方向が変換後は双曲空間 $\mathcal{H}^2/\mathbb{Z}$ から切り離された S^1 となっている．これは S^1 が着脱しているように見えることから，文献 [4] では，空間から切り離される S^1 を detachable circles と呼んでいる．

一般の $d-1$ 次元においても同様の変換で S^1 を着脱でき，$S^1\times S^{d-2}$ の計量

$$ds^2_{S^1\times S^{d-2}} = d\chi^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta d\Omega^2_{d-4} + \cos^2\theta d\phi^2 \tag{12}$$

は，$\cos^2\theta$ で割る Weyl 変換により

$$\frac{ds^2_{S^1\times S^{d-2}}}{\cos^2\theta} = \frac{d\chi^2+d\theta^2+\sin^2\theta d\Omega^2_{d-4}}{\cos^2\theta}+d\phi^2 \quad (= ds^2_{S^1\times\mathcal{H}^{d-2}/\mathbb{Z}}) \tag{13}$$

のように，$S^1\times\mathcal{H}^{d-2}/\mathbb{Z}$ の計量に変換される．

４．（漸近的）AdS 時空への応用

(1) 式の（漸近的）AdS 時空に対して次の座標変換を考える [4]．

$$r^2 = \frac{\rho^2}{\sin^2\tilde{\theta}} - 1, \quad \cos^2\theta = \frac{\rho^2\cos^2\tilde{\theta}}{\rho^2 - \sin^2\tilde{\theta}} \tag{14}$$

この座標変換は r もしくは ρ が十分大きい領域では，(14) 式の第 2 式より $\theta\simeq\tilde{\theta}$ となるため，第 1 式のみ残り

$$r^2 = \frac{\rho^2}{\sin^2\theta} \tag{15}$$

となる．したがって，座標変換 (14) 式を (1) 式に適用し ρ 一定の無限遠境界を見ると，

$$ds^2 = \rho^2\left(\frac{d\chi^2+d\theta^2}{\sin^2\theta}+d\phi^2\right) \tag{16}$$

となっている．これより，(10) 式と比較すると変換 (14) 式は境界の幾何を $S^1\times S^2$ から $S^1\times\mathcal{H}^2/\mathbb{Z}$ へ変えるということが分かる．

(14) 式で変換した後の作用の値を，ρ 一定，θ 一定にそれぞれカットオフを入れて再評価すると，主要部は

$$\frac{L_\chi(m\cos\varepsilon - r_h^3)}{2G} - \frac{L_\chi\cot\varepsilon}{2G} \tag{17}$$

となる．ここで ε は θ に対するカットオフであり $\varepsilon\to 0$ の極限をとる．このとき，第 1 項は変換前の作用 (5) 式と一致する．また，第 2 項は発散する項だが，これは AdS 時空の作用の値と一致する．したがって，2 つの解の安定性は変換前と変わらず，相転移が同じように存在する．

５．まとめと今後の課題

Hawking-Page 相転移の概要と，そこで扱われる時空の境界を双曲空間へ変換した場合の解の安定性について紹介した．ここで重要なことは，この相転移に関するゲージ理論との対応は今まで S^{d-2} 上の CFT で調べられてきたが，(14) 式の変換により $\mathcal{H}^{d-2}/\mathbb{Z}$ 上の CFT で対応が調べられるようになった点である．この手法をチャージを持った場合の時空などにも適用する時に同様の議論ができるかを検討し，ゲージ理論側との関連を調べることが今後の課題の 1 つである．

参考文献

[1] S. W. Hawking and Don N. Page, Commun. Math. Phys. 87, 577 (1983).

[2] B. Sundborg, Nucl. Phys. B 573, 349 (2000).

[3] O. Aharony, J. Marsano, S. Minwalla, K. Papadodimas and M. Van Raamsdonk, Adv. Theor. Math. Phys. 8, 603(2004).

[4] Gary T. Horowitz and Edgar Shaghoulian, JHEP 1801, 135 (2018).

[5] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, Phys. Rev. D 15, 2752 (1977).