O-12

散逸系の変分原理と Bateman ラグランジアンの導出

Variational Principle of a Dissipative System and Derivation of the Bateman Lagrangian

○松山健人[1], 鈴木隆史[2], 藤原侑樹[3], 出口真一[4]
*Kento Matsuyama[1], Takafumi Suzuki[2], Yuki Fujiwara[3], Shinichi Deguchi[4]

Abstract : In accordance with Galley's method, we construct analytical mechanics of a harmonic oscillator interacting with a heat bath. From this formulation, we derive the the Bateman Lagrangian for the damped harmonic oscillator.

１．導入

本研究の目的は, Galley の方法に従って熱浴と見なされる系と相互作用する調和振動子の解析力学を再構築し [1], それに基づき減衰振動を記述する Bateman ラグランジアン [2] を導くことである.

変分原理は様々な力学系において運動方程式を導く主要な原理であり, 物理学の土台である. しかし初期条件と終条件 (終時刻における固定条件) を課す通常の変分原理は, 終時刻における配位が初期条件のみによって決まるような散逸系の記述には適していない. そこで本研究では, Galley が提案した, 初期条件に加え, 終条件に代わる等価条件を課すような散逸系に適した変分原理を紹介する. 次に, この変分原理を用いて, 熱浴と相互作用する調和振動子の有効作用を求め, そこにいくつかの仮定を置くことによって, 減衰調和振動子を記述する Bateman ラグランジアンを導く. さらに, Bateman ラグランジアンから得られる増幅振動の運動方程式の解に注目し, 等価条件を課すことでその解が恒等的に 0 になることを示す.

２．通常の変分原理における問題点

振幅 $q(t)$, 質量 m, 振動数 ω を持つ調和振動子が, 振幅 $Q(t)$, 質量 M, 振動数 Ω を持つ他の調和振動子と, 結合強度 λ で結合しているような力学系を考える. この系の作用は

$$S[q,Q]=\int_{t_i}^{t_f}dt\left\{\frac{m}{2}(\dot{q}^2-\omega^2q^2)+\frac{M}{2}(\dot{Q}^2-\Omega^2Q^2)+\lambda qQ\right\} \tag{1}$$

である. 全系はエネルギーを保存し, ラグランジアンはあらわに時間に依存しないが, 振幅 q の振動子は振幅 Q の振動子とエネルギーを交換するため, 振幅 q の振動子のみからなる部分系においてエネルギーは保存しない.

振幅 Q に対する運動方程式を用いて, 作用 (1) から Q を消去することによって, Q 振動子の効果を q 振動子に取り入れる. 結果的に q に対する有効作用

$$\begin{aligned}S_{\rm eff}[q]=\int_{t_i}^{t_f}dt\bigg\{&\frac{m}{2}(\dot{q}^2-\omega^2q^2)+\frac{1}{2}\lambda qQ^{(h)}\\&+\frac{\lambda^2}{2M}\int_{t_i}^{t_f}dt'q(t)G_{\rm ret}(t-t')q(t')\bigg\}\end{aligned} \tag{2}$$

が得られる. ここで, $Q^{(h)}$ は同次解であり, $G_{\rm ret}(t-t')$ は遅延グリーン関数である. 有効作用 (2) に変分原理を適用することで, q に対する運動方程式

$$\begin{aligned}m\ddot{q}(t)+m\omega^2q(t)=&\frac{1}{2}\lambda Q^{(h)}(t)+\frac{\lambda^2}{2M}\int_{t_i}^{t_f}dt'\big[G_{\rm ret}(t-t')\\&+G_{\rm adv}(t-t')\big]q(t')\end{aligned} \tag{3}$$

を得る. ただし, 先進グリーン関数 $G_{\rm adv}(t-t')$ との関係式 $G_{\rm ret}(t'-t)=G_{\rm adv}(t-t')$ を用いた. 式 (3) は先進グリーン関数に依存しているため, 解は因果的に発展しない. また式 (3) は時間対称な積分核を持つため, 時間非対称な過程である散逸過程を記述しない.

Galley は, この望ましくない性質は終条件を設定したことが原因であると考え, これを等価条件に変更することで散逸系に適合する変分原理を定式化した.

３．Galley による散逸系の変分原理

座標の組を $\vec{q}\equiv(q,Q)$ と表し, 速度の組を $\dot{\vec{q}}\equiv(\dot{q},\dot{Q})$ と表す. Galley の方法に従い, どちらの組も変数を倍化する $\vec{q}\to(\vec{q}_1,\vec{q}_2)$, $\dot{\vec{q}}\to(\dot{\vec{q}}_1,\dot{\vec{q}}_2)$. 全体系のラグランジアンを $L(\vec{q},\dot{\vec{q}})$ とするとき, 倍化された系の作用は

$$S=\int_{t_i}^{t_f}L(\vec{q}_1,\dot{\vec{q}}_1)dt+\int_{t_f}^{t_i}L(\vec{q}_2,\dot{\vec{q}}_2)dt \tag{4}$$

と与えられる. また変分の際に設定される条件として

$$\delta\vec{q}_1(t_i)=\delta\vec{q}_2(t_i)=0\ ,\ \ \vec{q}_1(t_f)=\vec{q}_2(t_f)\ ,\ \ \dot{\vec{q}}_1(t_f)=\dot{\vec{q}}_2(t_f) \tag{5}$$

のような, 初期時刻と終時刻で異なる種類の条件を課す. 式 (5) の終時刻 t_f における条件は等価条件と呼ばれる. Galley の方法では, 変分を実行した後に $\vec{q}_1(t)=\vec{q}_2(t)=\vec{q}(t)$ と置く. この操作は物理的極限と呼ばれる.

Galley の散逸系の変分原理を第２章の系に適応すると, 作用 (1) は

$$\begin{aligned}S=\int_{t_i}^{t_f}dt\bigg[&\frac{m}{2}\left\{(\dot{q}_1^2-\dot{q}_2^2)-\omega^2(q_1^2-q_2^2)\right\}\\&+\frac{M}{2}\left\{(\dot{Q}_1^2-\dot{Q}_2^2)-\Omega^2(Q_1^2-Q_2^2)\right\}+\lambda(q_1Q_1-q_2Q_2)\bigg]\end{aligned} \tag{6}$$

と修正され, 式 (5) の条件は

$$\delta q_1(t_i)=\delta q_2(t_i)=0\ \ ,\ \ q_1(t_f)=q_2(t_f)\ \ ,\ \ \dot{q}_1(t_f)=\dot{q}_2(t_f)\ , \tag{7}$$

$$\delta Q_1(t_i)=\delta Q_2(t_i)=0\ ,\ \ Q_1(t_f)=Q_2(t_f)\ ,\ \ \dot{Q}_1(t_f)=\dot{Q}_2(t_f) \tag{8}$$

となる. ここで便利のために $q_+=\frac{1}{2}(q_1+q_2)$, $q_-=q_1-q_2$, $Q_+=\frac{1}{2}(Q_1+Q_2)$, $Q_-=Q_1-Q_2$ と置き, 変

[1] 日大理工・院 (前)・量子　[2] 日大短大・教員・一般　[3] 日大理工・院 (後)・量子　[4] 日大・教員・量科研

数変換を行う. 作用 (6) は

$$S[q_\pm, Q_\pm] = \int_{t_i}^{t_f} dt \Big\{ m(\dot{q}_+\dot{q}_- - \omega^2 q_+ q_-) + M(\dot{Q}_+\dot{Q}_- - \Omega^2 Q_+ Q_-) + \lambda(q_+ Q_- + q_- Q_+) \Big\} \tag{9}$$

となり, 条件 (7), (8) は

$$\delta q_\pm(t_i) = 0\ ,\quad q_-(t_f) = 0\ ,\quad \dot{q}_-(t_f) = 0\ , \tag{10}$$

$$\delta Q_\pm(t_i) = 0\ ,\quad Q_-(t_f) = 0\ ,\quad \dot{Q}_-(t_f) = 0 \tag{11}$$

となる. 振幅 $Q_\pm$ に対する運動方程式を用いて作用 (9) から $Q_\pm$ を消去すると, 有効作用

$$S_{\rm eff}[q_\pm] = \int_{t_i}^{t_f} dt \Big\{ m(\dot{q}_+\dot{q}_- - \omega^2 q_+ q_-) + \lambda q_- Q^{(h)}(t) + \frac{\lambda^2}{M}\int_{t_i}^{t_f} dt' q_-(t) G_{\rm ret}(t-t') q_+(t') \Big\} \tag{12}$$

が求まる. この作用を変分することで, 2 つの運動方程式

$$m\ddot{q}_+ + m\omega^2 q_+ = \lambda Q^{(h)} + \frac{\lambda^2}{M}\int_{t_i}^{t_f} dt' G_{\rm ret}(t-t') q_+(t')\ , \tag{13}$$

$$m\ddot{q}_- + m\omega^2 q_- = \frac{\lambda^2}{M}\int_{t_i}^{t_f} dt' G_{\rm adv}(t-t') q_-(t') \tag{14}$$

が得られる. 物理的極限 $q_1 = q_2 = q$ を取ると $q_-(t) = 0$ となり, 式 (14) の両辺は恒等的に 0 となるので, 最終的に

$$m\ddot{q} + m\omega^2 q = \lambda Q^{(h)} + \frac{\lambda^2}{M}\int_{t_i}^{t_f} dt' G_{\rm ret}(t-t') q(t') \tag{15}$$

が非自明な運動方程式として残る. 式 (15) は遅延グリーン関数のみに依存しているため, その解は初期条件から因果的に発展し, 時間非対称な散逸系を記述する.

4．Bateman ラグランジアンの導出

振幅 Q の振動子が $2N+1$ 個ある場合, 即ち Q を $\{Q_n\}_{n=-N}^{N}$ に置き換えて一般化すると, 有効作用 (12) は

$$S_{\rm eff}[q_\pm] = \int_{t_i}^{t_f} dt \Big[m(\dot{q}_+\dot{q}_- - \omega^2 q_+ q_-) + q_- F(t) + \int_{t_i}^{t_f} dt' q_-(t)\theta(t-t')\gamma(t-t') q_+(t') \Big] \tag{16}$$

となる. ただし, $F(t) \equiv \sum_{n=-N}^{N} \lambda_n Q_n^{(h)}$, $\gamma(t-t') \equiv \sum_{n=-N}^{N} \lambda_n^2/(M_n\Omega_n)\sin\Omega_n(t-t')$ である. $2N+1$ 個の Q 振動子の質量を共通の M に取り, 結合強度 λ_n を $\lambda_n = \lambda n$ とし, Ω_n も同様に $\Omega_n = \Omega n$ とする. さらに N が十分大きいとすると $\gamma(t-t')$ は

$$\gamma(t-t') \simeq 2c\frac{d}{dt'}\delta(t-t') \tag{17}$$

のように近似できる. ただし, $c \equiv \frac{\pi\lambda^2}{M\Omega^3}$ である. 式 (17) を作用 (16) に代入し, 部分積分などを行うと

$$S_{\rm eff}[q_\pm] = \int_{t_i}^{t_f} dt \Big[m(\dot{q}_+\dot{q}_- - \omega_{\rm ren}^2 q_+ q_-) + \frac{c}{2}(q_+\dot{q}_- - \dot{q}_+ q_-) + q_- F \Big] \tag{18}$$

のように変形できる. ただし, $\omega_{\rm ren}$ は $\omega_{\rm ren}^2 \equiv \omega^2 - \frac{c}{m}\delta(0)$ で定義される繰り込まれた角振動数である. 式 (18) の被積分関数として, 減衰振動を記述する Bateman ラグランジアン

$$L_{\rm eff} = m(\dot{q}_+\dot{q}_- - \omega_{\rm ren}^2 q_+ q_-) + \frac{c}{2}(\dot{q}_- q_+ - q_-\dot{q}_+) + q_- F \tag{19}$$

が得られる [2].

5．増幅振動解に関する考察

作用 (18) を q_- に関して変分すると, 減衰調和振動子の運動方程式

$$m\ddot{q}_+ + c\dot{q}_+ + m\omega_{\rm ren}^2 q_+ = F(t) \tag{20}$$

が得られ, q_+ に関して変分すると, 増幅調和振動子の運動方程式

$$m\ddot{q}_- - c\dot{q}_- + m\omega_{\rm ren}^2 q_- = 0 \tag{21}$$

が得られる. いま, 式 (21) に注目する. この式の一般解は

$$q_-(t) = \mathrm{e}^{ct}\left(A\mathrm{e}^{i\omega' t} + B\mathrm{e}^{-i\omega' t}\right) \tag{22}$$

である. ただし, $\omega' \equiv \sqrt{\omega_{\rm ren}^2 - \frac{c^2}{4m^2}}$ であり, A と B は定数である. この一般解に対して, すでに課されている等価条件 $q_-(t_f) = 0$, $\dot{q}_-(t_f) = 0$ を適用すると, 式 (22) は $q_-(t) = 0$ となる. これは物理的極限に他ならず, Bateman ラグランジアンに対しては等価条件から物理的極限が自動的に得られることが分かる. 実際に, $q_-(t) = 0$ より増幅調和振動子の運動方程式 (21) の左辺は恒等的に 0 となり, 減衰調和振動子の運動方程式 (20) のみが非自明な方程式として残る. 従って, Bateman ラグランジアンは等価条件の下で減衰振動のみを記述することが分かる. (同様の結論が文献 [3] でも指摘されている.)

6．まとめと今後の課題

本研究では, Galley の方法に従って熱浴と見なされる系と相互作用する調和振動子の解析力学を再構築し, 今まで行われてこなかった Bateman ラグランジアンの導出を行った. また, 等価条件の下で Bateman ラグランジアンが減衰振動のみを記述することを示した.

今後の課題として, 輻射反作用を受ける荷電粒子の力学系に対して, 本研究と同様の考察を行うことが挙げられる.

参考文献

[1] C. R. Galley, Phys. Rev. Lett. **110**, 174301 (2013).

[2] H. Bateman, Phys. Rev. **38** 815, (1931).

[3] N. E. Martínez-Pérez, J. Math. Phys. **59**, 032904 (2018).