O-13

有限な距離の電場による Schwinger 粒子対生成
Schwinger pair production in a finite distance electric field

○西川大樹[1]，二瓶武史[2]
*Taiki Nishikawa[1], Takeshi Nihei[2]

Abstract: We review Schwinger effect in a finite distance electric field. We calculate the transmission and reflection amplitudes for both bosons and fermions and study the finite distance effect on the production rate.

１．導入

真空中に強い電場を加えると電子と陽電子の対が生成される現象は Schwinger 効果と呼ばれている．これは，負エネルギー状態の電子が電場によりポテンシャル障壁を越えて正エネルギー状態に移り，その空孔が正エネルギー状態の陽電子となるトンネル効果として理解できる．Schwinger は一様な電場が無限の空間の領域に広がっている系に対し，グリーン関数とゲージ変換の下でのグリーン関数の振る舞いを利用して解析した．近年の研究において，graphene を用いた Schwinger 効果の検証実験が提案されており，そこでは，空間的に有限な領域の強電場が用いられている[1]．しかし，実験による Schwinger 効果の検証は成功していない．

ここでは，[2]の論文に沿って，有限の距離で離れた２つの平面板の間の強い線形ベクトルポテンシャルを考え，ボース粒子とフェルミ粒子の透過振幅と反射振幅を求める．

２．ボース粒子の透過振幅と反射振幅

質量がmで電荷が$-e$の荷電ボース粒子を記述するスカラー場ϕに対するクラインゴルドン方程式は，pを 4 元運動量，Aをベクトルポテンシャルとして

$$[(p+eA)^2-m^2]\phi=0 \tag{1}$$

と書ける．ここでAは

$$A=(A_0(z),0,0,0)$$

$$A_0(z)=\begin{cases}0 & (z\le 0) \quad 領域１\\ -\epsilon z & (0\le z\le L) \quad 領域２\\ -\epsilon L & (L\le z) \quad 領域３\end{cases} \tag{2}$$

と与える．ただし，ϵを電場とし，$z=0$，$z=L$に平面板を設置する．(2)のように電場を与える．ポテンシャルはxとyに依存せず, 電場はz方向にしか依存しないため，クラインゴルドン方程式(1)を満たす解として

$$\phi=\exp\left[i\left(p_x x+p_y y-Et\right)\right]f(z) \tag{3}$$

が考えられる．ただし，Eはエネルギーである．

ここで，$\kappa=e\epsilon$とおき，zから無次元の長さξ への変換

$$\xi=\frac{\sqrt{2}(E+\kappa z)}{\sqrt{\kappa}} \tag{4}$$

と(3)式を用いると(1)式は調和振動子のエネルギー固有値に類似した形の方程式

$$\left[-\frac{d^2}{d\xi^2}+a-\frac{1}{4}\xi^2\right]f(\xi)=0 \tag{5}$$

に帰着できる．ただし，$\mathbf{p}_T=\left(p_x,p_y\right)$とし，$a=\frac{m^2+\mathbf{p}_T{}^2}{2\kappa}$である．(5)式の領域ごとの解は

$$\begin{aligned}f_1(\xi)&=Ia_I e^{-ik_L\xi}+Ra_R e^{ik_L\xi}\\ f_2(\xi)&=AE(a,\xi)+BE^*(a,\xi)\\ f_3(\xi)&=Ta_T e^{ik_R\xi}\end{aligned} \tag{6}$$

となる．I，R，Tは入射，反射，透過の振幅を与える．$k_{L,R}$とそれに含まれる$\xi_{L,R}$はそれぞれ,

$k_{L,R}=\sqrt{\frac{1}{4}\xi_{L,R}^2-a}$，$\xi_L=\frac{\sqrt{2}E}{\sqrt{\kappa}}$，$\xi_R=\frac{\sqrt{2}(E+\kappa L)}{\sqrt{\kappa}}$　である．入射粒子のエネルギーは負であるため，$e^{-ik_L\xi}$はz軸の正の方向へ運動する粒子を表す．また,

$a_I=a_R=1/|E|^{1/2}$，$a_T=1/|E+\kappa L|^{1/2}$であり，(6)式の$E(a,\xi)$と$E^*(a,\xi)$は放物柱関数である[3].

波動関数の接続条件

$$\begin{aligned}f_1|_{\xi=\xi_L}&=f_2|_{\xi=\xi_L}\\ \partial_\xi f_1|_{\xi=\xi_L}&=\partial_\xi f_2|_{\xi=\xi_L}\\ f_2|_{\xi=\xi_R}&=f_3|_{\xi=\xi_R}\\ \partial_\xi f_2|_{\xi=\xi_R}&=\partial_\xi f_3|_{\xi=\xi_R}\end{aligned}$$

より，透過振幅Tと反射振幅Rが以下のように求まる．

$$\mathrm{T}=\frac{a_I}{a_T}\frac{4k_L e^{-i(k_L\xi_L+k_R\xi_R)}}{(E_L^{*\prime}-ik_L E_L^*)(E_R'-ik_R E_R)-(E_L'-ik_L E_L)(E_R^{*\prime}-ik_R E_R^*)}$$

１：日大理工・院（前）・物理　　２：日大理工・教員・物理

$$\mathrm{R} = e^{-2ik_L\xi_L}\frac{[(E_L' + ik_LE_L)(E_R^{*\prime} - ik_RE_R^*) - (E_L^{*\prime} + ik_LE_L^*)(E_R' - ik_RE_R)]}{(E_L^{*\prime} - ik_LE_L^*)(E_R' - ik_RE_R) - (E_L' - ik_LE_L)(E_R^{*\prime} - ik_RE_R^*)}$$

ただし，$E_{L,R} = E(a, \xi_{L,R})$，$E'_{L,R} = \left.\frac{dE(a,\xi)}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_{L,R}}$ である．

以上より，ボース粒子の透過振幅と反射振幅が求まった．

３．フェルミ粒子の透過振幅と反射振幅

質量がmで電荷が$-e$の荷電フェルミ粒子を記述するスピノル場ψに対するディラック方程式は，γ^μをガンマ行列，p_μを 4 元運動量，A_μをベクトルポテンシャルとし

$$[\gamma^\mu(p_\mu + eA_\mu) - m]\psi = 0$$

と書ける．この１つの解として以下が書ける．

$$\psi = [\gamma^\mu(p_\mu + eA_\mu) + m]\phi$$

そのため，

$$[(p + eA)^2 - m^2 - i\kappa\alpha_3]\phi = 0 \qquad (7)$$

と表せて，ディラック方程式(7)の解として

$$\phi = \exp[i(p_xx + p_yy - Et)]n(z) \qquad (8)$$

が考えられる．

さらに，

$$\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \mu_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \mu_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\ \mu_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

を定義して$n(z) = \sum_{\lambda=1}^{4} f_\lambda(z)\mu_\lambda$と書く．

(4)式の変換を行うと(7)式は，

$$\left[-\frac{d^2}{d\xi^2} + \left(a + \eta\frac{i}{2}\right) - \frac{1}{4}\xi^2\right]f_\lambda(\xi) = 0 \qquad (9)$$

となる．(9)式の解は

$$f_1(\xi) = Ie^{-ik_L\xi}\chi_I + Re^{ik_L\xi}\chi_R$$

$$f_2(\xi) = \left[\gamma^0(E + \kappa z) - (\gamma^1p_x + \gamma^2p_y) + i\gamma^3\frac{d}{dz} + m\right] \times [AM(a,\xi) + BN(a,\xi)]\mu_\lambda$$

$$f_3(\xi) = Te^{ik_R\xi}\chi_T$$

と書ける．

χ_I，χ_R，χ_Tは$\chi_K(K = I,R,T)$として

$\chi_K = a_K(\gamma\cdot p_K + m)\mu_\lambda$と表す．

ここで，

$a_I = [2E(E + p_z)]^{-1/2}$，　$a_R = [2E(E - p_z)]^{-1/2}$，

$a_T = [2\tilde{E}(\tilde{E} - \widetilde{p_z})]^{-1/2}$ ，$\tilde{E} = E + \kappa L$

でEはエネルギーである．

4 元運動量は

$p_I = (E, p_x, p_y, -p_z)$　，　$p_R = (E, p_x, p_y, p_z)$　，

$p_T = (\tilde{E}, p_x, p_y, \widetilde{p_z})$

であり，それらに含まれるp_zと$\widetilde{p_z}$は

$p_z = \sqrt{2\kappa}k_L$，$\widetilde{p_z} = \sqrt{2\kappa}k_R$である．

ただし，

$$M(a,\xi) = e^{\frac{i\xi^2}{4}}\,{}_1F_1\left(\frac{a}{2}i, \frac{1}{2}, -\frac{i}{2}\xi^2\right),$$

$$N(a,\xi) = \xi e^{\frac{i\xi^2}{4}}\,{}_1F_1\left(\frac{1 + ai}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{i}{2}\xi^2\right)$$

であり，${}_1\mathrm{F}_1$は合流型超幾何関数である[3].

波動関数の接続条件より，透過振幅Tと反射振幅Rが以下のように求まる．

$$\mathrm{T} = \frac{a_I}{a_T}\frac{4k_L\mathrm{e}^{-i(k_L\xi_L + k_R\xi_R)}}{(N_L' - ik_LN_L)(M_R' - ik_RM_R) - (M_L' - ik_LM_L)(N_R' - ik_RN_R)}$$

$$\mathrm{R} = e^{-2ik_L\xi_L}\frac{[(M_L' + ik_LM_L)(N'_R - ik_RN_R) - (N_L' + ik_LN_L)(M_R' - ik_RM_R)]}{(N_L' - ik_LN_L)(M_R' - ik_RM_R) - (M_L' - ik_LM_L)(N_R' - ik_RN_R)}$$

ただし，$M_{L,R} = M(a, \xi_{L,R})$，$M'_{L,R} = \left.\frac{dM(a,\xi)}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_{L,R}}$ であり

$N_{L,R}$と$N'_{L,R}$も同様である．

以上より，フェルミ粒子の透過振幅と反射振幅が求まった．

４．まとめと今後の課題

クラインゴルドン方程式とディラック方程式を満たす(3)式と(8)式により，z 成分を分離した後，(4)式の変換を行えば，調和振動子のエネルギー固有値に類似した形の方程式が得られることを見た．また，粒子統計の違いにより，透過振幅と反射振幅の記述に必要な関数に違いが生じた．

今後の課題の１つは，ここで得られた透過振幅を用いて，[2]の論文に沿って対生成率を求め，Schwinger が求めた対生成率と比較し，電場の有限サイズの効果を調べることである．

５．参考文献

[1] D. Allor, T. D. Cohen, and D. A. McGady, Phys. Rev. D78, 096009 (2008).

[2] R. C. Wang and C. Y. Wong, Phys. Rev. D38, 348-359, (1988).

[3] M. Abramowitz and I. Segun, Handbook of Math ematical Functions, Dover publications, (1965).