

## 背景場の方法によるカシミール効果 The Casimir effect with a background field method

○五味大祐<sup>1</sup>, 二瓶武史<sup>2</sup>

\*Daisuke Gomi, Takeshi Nihei

Abstract: We study the vacuum polarization energy of a quantum scalar field in the presence of a  $\delta$ -function background field. The Casimir force between parallel plates rederived in the strong coupling limit.

### 1. 導入

真空中に平行に置かれた二枚の無帯電状態の極板間に働くカシミール力 $F_c(a)$ は、以下で与えられる[1] ( $\hbar = c = 1$ ).

$$F_c(a) = \frac{L^2 \pi}{240 a^4} \quad (1)$$

ここで $a$ は極板間距離,  $L^2$ は極板面積である.

本講演では, カシミール力の導出として 2 つの方法を議論する. 1 つ目の方法[2]は真空エネルギー $E(a)$ を用いる方法である. 簡単のため質量 0 の自由なスカラー場 $\phi(t, \mathbf{x})$ を考える. 設置した極板に対して境界条件を課し真空エネルギー $E(a)$ を求め, 極板間に働く力 $F(a) = -\frac{\partial E(a)}{\partial a}$ を導出する.

二つ目の方法[3]は, 背景場 $\sigma(\mathbf{x})$ との相互作用を導入する方法である. 質量 $m$ のスカラー場 $\phi(t, \mathbf{x})$ と静的な背景場 $\sigma(\mathbf{x})$ の相互作用を考え, その結合定数を $\lambda$ とする.  $n$ 点有効エネルギー $\varepsilon^{(n)}(\sigma, \Lambda)$ を求め, すべての $n$ についてエネルギーを足し上げることで, 極板間に働くエネルギー $\varepsilon(\sigma, \Lambda)$ は得られる. ここで $\Lambda$ は紫外発散のカットオフである. 極限 $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\Lambda \rightarrow \infty$ をとることで, 極板間に働く力 $F(a) = -\frac{\partial \varepsilon(\sigma, \Lambda)}{\partial a}$ を導出する.

以上の 2 通りの方法で導出した力は, 場 $\phi$ の質量 $m$ が 0 のときカシミール力 (1) 式と一致するか確認する. また 2 つ目の方法で得られた圧力 $\mathcal{P}(\lambda)$ の結合定数 $\lambda$ の依存性を見ていく.

### 2. 真空エネルギーを用いた解析

次の質量 $m$ のラグランジアン $\mathcal{L}$ を考える.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(t, \mathbf{x}) \partial^\mu \phi(t, \mathbf{x}) - \frac{m^2}{2} \phi^2(t, \mathbf{x}) \quad (2)$$

カシミール力 (1) 式との一致をみるために,  $\phi$ の質量 $m$ を 0 とする. ハミルトニアン $\hat{H}$ は

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left( \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right) \quad (3)$$

ここで $\omega_{\mathbf{k}}$ は以下である.

$$\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 (n_x^2 + n_y^2) + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n_z^2} \quad (4)$$

量子数は  $n_x, n_y = 0, \pm 1, \pm 2 \dots, n_z = 1, 2, 3 \dots$ ,  $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})$ は生成演算子,  $\hat{a}(\mathbf{k})$ は消滅演算子である. また $L \gg a$ とする.

極板は一辺 $L$ の正方形, 極板間距離を $a$ として以下の境界条件を課す.

$$\phi(t, x, y, z) = \phi(t, x + L, y + L, z)$$

$$\phi(t, x, y, 0) = \phi(t, x, y, a) = 0$$

(3)式に(4)式を代入し真空期待値をとることで真空エネルギー $E(a)$ は

$$E(a) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \quad (6)$$

となる.  $E(a)$ は発散するため正則化する必要がある.

$$E(a) = -\frac{1}{2} \lim_{\mu \rightarrow +0} \frac{d}{d\mu} \sum_{\mathbf{k}} e^{-\mu \omega_{\mathbf{k}}} \quad (7)$$

$\mu > 0$ は定数である. 極板間の真空エネルギー $\Delta E(a)$ は $E(a)$ と極板間距離を $a \rightarrow \infty$ とした真空エネルギー $E(\infty)$ の差 $\Delta E(a) = E(a) - E(\infty)$ で与えられる.

$$\Delta E(a) = \frac{L^2}{4} \lim_{\mu \rightarrow +0} \frac{d}{d\mu} \frac{1}{\mu a} \frac{e^{\frac{\mu \pi}{a}}}{\left(e^{\frac{\mu \pi}{a}} - 1\right)^2} \quad (8)$$

電磁場の場合, 横波の自由度は 2 より, 極板間に働く力の大きさ $F(a)$ は

$$F(a) = \frac{L^2 \pi^2}{240 a^4} \quad (9)$$

となり(1)式と一致することが確認できた.

<sup>1</sup> 日大理工・院 (前)・物理

<sup>2</sup> 日大理工・教員・物理

### 3. 背景場を用いた導出

背景場 $\sigma(\mathbf{x})$ と相互作用するスカラー場 $\phi(t, \mathbf{x})$ として、以下のラグランジアン $\mathcal{L}$ を考える。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(t, \mathbf{x}) \partial^\mu \phi(t, \mathbf{x}) - \frac{m^2}{2} \phi(t, \mathbf{x})^2 \\ & + \mathcal{L}_{\text{int}} + \mathcal{L}_{\text{CT}} \\ \mathcal{L}_{\text{int}} = & \frac{1}{2} \lambda \sigma(\mathbf{x}) \phi^2(\mathbf{x}, t) \\ \mathcal{L}_{\text{CT}} = & c_1 \sigma(\mathbf{x}) + c_2 \sigma(\mathbf{x})^2 \end{aligned} \quad (10)$$

とする。ここで $m$ は場の質量、 $\lambda$ を結合定数、 $\mathcal{L}_{\text{int}}$ を相互作用ラグランジアン、 $\mathcal{L}_{\text{CT}}$ を相殺項とする。 $\mathcal{L}$ から求まる運動方程式は $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = -\lambda\sigma\phi$ である。極板は一辺 $L$ の正方形、極板間距離は $a$ であり原点  $O$  から各々 $-a$ 、 $a$ 離れた位置にある。極板は  $z$  軸について対称に設置しているの、グリーン関数は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} G(x, x') = & \int \frac{d^3 \tilde{q}}{(2\pi)^3} e^{-i\tilde{q} \cdot (\tilde{x} - \tilde{x}')} \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \sum_{l=0,1} \frac{\cos\left(zp_z + \frac{l\pi}{2}\right) \cos\left(z'p_z + \frac{l\pi}{2}\right)}{\tilde{q}^2 - p^2 - m^2 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (11)$$

$\tilde{q}$ ,  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{x}'$ は時間成分と $x$ ,  $y$ 成分の3成分をまとめている。 $p_z$ は $z$ 方向の運動量である。また発散を防ぐために $i\epsilon$ 処方を施してある。 $n$ 点の有効作用 $\Gamma^{(n)}(\sigma)$ は

$$\begin{aligned} \Gamma^{(n)}(\sigma) = & \frac{-i\lambda^n}{2n} \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n \\ & \times G(x_1, x_2) \sigma(z_2) \dots G(x_n, x_1) \sigma(z_1) \end{aligned} \quad (12)$$

で与えられる。ここで背景場 $\sigma(\mathbf{x})$ の一つの例として、以下のような $\delta$ 関数型を仮定する。

$$\sigma(z) = \delta(z - a) + \delta(z + a) \quad (13)$$

ユークリッド化された有効エネルギー $\varepsilon^{(n)}$ は

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(n)}(\sigma, \Lambda) = & -\frac{1}{2n} \int^\Lambda \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left[ \frac{-\lambda}{2\omega(q)} \right]^n \\ & \times \left\{ (1 + e^{-2\omega(q)a})^n + (1 - e^{-2\omega(q)a})^n \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

である。 $\varepsilon^{(n)}$ は $n = 1 \sim 3$ では発散するため、カットオフ $\Lambda$ を導入して有限にする。 $\varepsilon^{(n)}$ をすべての $n$ について足し上げれば、極板間に働くエネルギー $\varepsilon(\sigma, \Lambda)$ は

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma, \Lambda) = & \int_m^{\sqrt{\Lambda^2 + m^2}} \frac{d\omega \omega \sqrt{\omega^2 - m^2}}{(2\pi)^2} \\ & \times \ln \left[ 1 + \frac{\lambda}{\omega(q)} + \frac{\lambda^2}{4\omega^2(q)} (1 - e^{-4\omega(q)L}) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

となる。よって極板間に働く圧力 $\mathcal{P}(a)$ は次のように求まる。

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\sigma, \Lambda) = & \frac{\lambda^2}{8\pi^2} \\ & \times \int_m^{\sqrt{\Lambda^2 + m^2}} \frac{-\sqrt{\omega^2 - m^2} e^{-4\omega(q)a} d\omega}{1 + \frac{\lambda}{\omega(q)} + \frac{\lambda^2}{4\omega^2(q)} (1 - e^{-4\omega(q)a})} \end{aligned} \quad (16)$$

となる。極限 $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\Lambda \rightarrow \infty$ をとることで

$$\mathcal{P}(2a) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_m^\infty d\omega \frac{\omega^2(q) \sqrt{\omega^2 - m^2}}{(e^{4\omega(q)a} + 1)} \quad (17)$$

となる。カシミール力 (1) 式との一致をみるために、 $\phi$ の質量 $m$ を0とする。電磁場の場合、横波の自由度は2より、極板間に働く力の大きさ $F(d)$ は $d = 2a$ で

$$F(d) = \frac{L^2 \pi^2}{240} \frac{1}{d^4} \quad (18)$$

となり(1)と一致することが確認できた。

### 4. 圧力 $\mathcal{P}(\lambda)$ の結合定数 $\lambda$ に対する依存性

図1は、極限 $\Lambda \rightarrow \infty$ 、質量 $m$ を固定したとき、(19)式の結合定数 $\lambda$ の依存性についてみることができる。

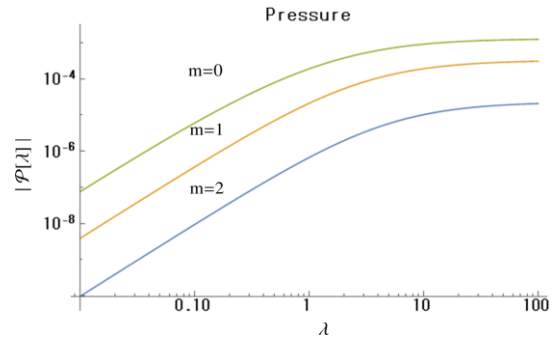


Figure 1. The pressure  $\mathcal{P}(\lambda)$  versus the finite coupling constant  $\lambda$

### 5. まとめと今後の展望

ここでは、カシミール力の導出について2通りの方法と、結合定数が有限な場合のカシミール力について紹介した。カシミール力の起源は真空エネルギーではなく、ファンデルワールス力であると主張[4]されていこともあり、カシミール力の起源について調べるのが今後の課題の1つである。

### 6. 参考文献

- [1] H. B. G. Casimir, Kon. Ned. Akad. Wetensch. Proc. 51, 793 (1948).
- [2] F. Ravndal, hep-ph/0009208.
- [3] N. Graham, R. L. Jaffe, V. Khemani, M. Quandt, O. Schroder and H. Weigel, Phys. Rev. D 72, 021301 (2005).
- [4] H. Nicolice, Phys. Lett. B 761, 197 (2016).