O-16

軟光子定理と無限個の保存電荷

○風間智弘[1]，　大谷聡[2]
*Tomohiro Kazama[1], Satoshi Ohya[2],

Abstract : It has been recently shown that the soft photon theorem is equivalent to the Ward-Takahashi identity for infinitely-many conserved charges in QED [1]. In this talk we shall first review the soft photon theorem and then derive the infinitely-many conserved charges as well as the asymptotic matter current in QED.

1．導入

軟光子定理とは量子電磁力学 (QED) の散乱振幅に対する定理で，低エネルギー光子 (軟光子) を終状態に含む散乱振幅に対して成り立つ普遍的な低エネルギー定理である．具体的には以下の関係式として表される：

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}(p_1^{\rm in},\cdots,p_n^{\rm in},p_1^{\rm out},\cdots,p_m^{\rm out};q,\epsilon)\\&\xrightarrow{|\boldsymbol{q}|\to 0}\left[\sum_{i=1}^{n}Q_i^{\rm in}\frac{p_i^{\rm in}\cdot\epsilon}{p_i^{\rm in}\cdot q}-\sum_{i=1}^{m}Q_i^{\rm out}\frac{p_i^{\rm out}\cdot\epsilon}{p_i^{\rm out}\cdot q}\right]\\&\qquad\times\mathcal{M}_0(p_1^{\rm in},\cdots,p_n^{\rm in},p_1^{\rm out},\cdots,p_m^{\rm out})\end{aligned}\tag{1}$$

ここで，$\mathcal{M}_0(p_1^{\rm in},\cdots,p_n^{\rm in},p_1^{\rm out},\cdots,p_m^{\rm out})$ は始状態が電荷 $Q_i^{\rm in}$，運動量 $p_i^{\rm in}$ の n 個の粒子，終状態が電荷 $Q_i^{\rm out}$，運動量 $p_i^{\rm out}$ の m 個の粒子の場合の散乱過程に対する散乱振幅である．また，$\mathcal{M}(p_1^{\rm in},\cdots,p_n^{\rm in},p_1^{\rm out},\cdots,p_m^{\rm out};q,\epsilon)$ が上の散乱過程の終状態に運動量 q，偏極ベクトル ϵ の光子が 1 つ加わった場合の散乱振幅である．式 (1) は $\mathcal{M}_0$ の詳細に依らず低エネルギー ($|\boldsymbol{q}|\to 0$) で普遍的に成り立ち場の量子論の黎明期から知られている公式である [2–4].

この古くから知られている軟光子定理に対して，最近大きな発展があった．2014 年，A. Strominger らは QED に存在する次の保存電荷

$$Q[\Lambda]=\int_{x^0=t}d^3\boldsymbol{x}\left(J^0_{\rm mat}(x)\Lambda(x)+\boldsymbol{E}(x)\cdot\boldsymbol{\nabla}\Lambda(x)\right)\tag{2}$$

を用い，この保存電荷に対する Ward-Takahashi 恒等式 $Q^+[\Lambda]S=SQ^-[\Lambda]$ が軟光子定理に他ならないことを示した [1]．ここで，$Q^\pm[\Lambda]$ は式 (2) の $t\to\pm\infty$ での極限で，S は S 行列演算子である．

以下，まず式 (2) は無限個の保存電荷 [1,5] を表すことを示す．その後，Ward-Takahashi 恒等式から軟光子定理を導くための布石として，QED の漸近カレントを調べる．最後にまとめと今後の展望について述べる．

2．無限個の保存電荷

まず電磁気学における Gauss 則の微分形 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(x)=\rho(x)$ から始める．これは次の Lorentz 共変性が明白な形式での Maxwell 方程式の第 0 成分である：

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}(x)=J^\mu_{\rm mat}(x)\tag{3}$$

ここで，$F^{\mu\nu}=-F^{\nu\mu}$ は電磁場の強さ，$J^\mu_{\rm mat}$ は物質場の作るカレントで，その第 0 成分が電荷密度 ρ である．この $J^\mu_{\rm mat}$ は次のカレント保存則を満たす：

$$\partial_\mu J^\mu_{\rm mat}(x)=0=\partial_\mu\partial_\nu F^{\mu\nu}(x)\tag{4}$$

そして，このカレント保存則より次の保存電荷 $Q_{\rm mat}$ が存在することが言える：

$$Q_{\rm mat}=\int_{x^0=t}d^3\boldsymbol{x}\,J^0_{\rm mat}(x)=\int_{x^0=t}d^3\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(x)\tag{5}$$

但し，積分は $x^0=t=$ 一定 の 3 次元超平面内で行う．結果は勿論 t の選び方には依らない．

続いて次の 4 元ベクトル J^μ を考える：

$$\begin{aligned}J^\mu(x)&\equiv\partial_\nu\left(F^{\mu\nu}(x)\Lambda(x)\right)\\&=J^\mu_{\rm mat}(x)\Lambda(x)+F^{\mu\nu}(x)\partial_\nu\Lambda(x)\end{aligned}\tag{6}$$

ここで，Λ は任意関数である．$F^{\mu\nu}$ の反対称性よりこの J^μ に対しても次のカレント保存則が自明に成り立つ：

$$\partial_\mu J^\mu=\partial_\mu\partial_\nu\left(F^{\mu\nu}\Lambda\right)=0\tag{7}$$

従って，先程と同じく次の保存電荷が存在する筈である：

$$Q[\Lambda]=\int_{x^0=t}d^3\boldsymbol{x}\,J^0(x)\tag{8}$$

$$=\int_{x^0=t}d^3\boldsymbol{x}\left(J^0_{\rm mat}(x)\Lambda(x)+\boldsymbol{E}(x)\cdot\boldsymbol{\nabla}\Lambda(x)\right)\tag{9}$$

この $Q[\Lambda]$ は関数 Λ に依存し，その値は当然 Λ の選び方に依るが，実はこれは無限個の保存電荷が存在し得ることを意味する．これを示す．まず $J^0=\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{E}\Lambda)$ および Gauss の定理を使うと，式 (8) は次の無限遠での表面積分として書き直せる：

$$\begin{aligned}Q[\Lambda]&=\int_{x^0=t}d^3\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{E}(x)\Lambda(x))\\&=\lim_{r\to\infty}\int_{\mathbb{S}^2_t(r)}d^2\Omega\,r^2E_r(x)\Lambda(x)\end{aligned}\tag{10}$$

ここで，E_r は電場 $\boldsymbol{E}$ の動径成分，$\mathbb{S}^2_t(r)$ は $x^0=t$ の 3 次元超平面内の半径 r の 2 次元球面で，次式で定義される：

$$E_r(x)=\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{E}(x)\tag{11}$$

$$\mathbb{S}^2_t(r)=\left\{(x^0,\boldsymbol{x}):x^0=t\ \&\ |\boldsymbol{x}|=r\right\}\tag{12}$$

[1] 日大理工・院 (前)・量子　[2] 日大・量科研

但し，$\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|$ は動径方向の単位ベクトルである．問題は積分 (10) が収束するか否かで，勿論これは $E_r(x)$ と $\Lambda(x)$ の $r \to \infty$ での振る舞いに依存する．一先ず，E_r と Λ は $r \to \infty$ で次のように振る舞うと仮定する：

$$E_r(x) \to \frac{Q(\hat{\boldsymbol{x}})}{r^2} + O(r^{-3}) \quad (r \to \infty) \tag{13}$$

$$\Lambda(x) \to \varepsilon(\hat{\boldsymbol{x}}) + O(r^{-1}) \quad (r \to \infty) \tag{14}$$

但し，$Q(\hat{\boldsymbol{x}})$ と $\varepsilon(\hat{\boldsymbol{x}})$ は $\boldsymbol{x}$ の方向 (即ち角度) のみに依存する実関数で，$\boldsymbol{x}$ の大きさ r には依らないとする．実際これらの仮定を式 (10) に代入すると次のようになる：

$$\begin{aligned} Q[\Lambda] &= \int_{\mathbb{S}^2_t(\infty)} d^2\Omega\, Q(\hat{\boldsymbol{x}})\varepsilon(\hat{\boldsymbol{x}}) \\ &= \int_{\mathbb{S}^2_t(\infty)} d^2\Omega \sum_{lml'm'} Q_{lm} Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{x}}) \varepsilon^*_{l'm'} Y^*_{l'm'}(\hat{\boldsymbol{x}}) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Q_{lm} \varepsilon^*_{lm} \end{aligned} \tag{15}$$

但し，2 番目の等号で $Q(\hat{\boldsymbol{x}})$ と $\varepsilon(\hat{\boldsymbol{x}}) = \varepsilon^*(\hat{\boldsymbol{x}})$ を球面調和関数 $Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{x}})$ で展開し，最後の等号で球面調和関数の規格直交性 $\int_{\mathbb{S}^2_t(\infty)} d^2\Omega\, Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{x}}) Y^*_{l'm'}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$ を用いた．式 (15) に現れる Q_{lm} が無限個の保存電荷である．特に $l = 0$ の S 波モードに対応するのが通常の保存電荷 $Q_{\mathrm{mat}} = Q_{00}$ となっている．

３．漸近カレント

これまでの議論は完全に古典論的だったので，次に $Q[\Lambda]$ を量子論的に取り扱うことを考えたい．カレント $J^\mu_{\mathrm{mat}}(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ と電場 $\boldsymbol{E}(x)$ を場の演算子に格上げして積分 (2) を計算すれば良いが，その際これは $|t| \to \infty$ で評価するのが簡単である．この時問題になるのはカレント演算子 $J^\mu_{\mathrm{mat}}(x)$ の漸近形で，なぜなら一般に演算子の積の極限は個々の演算子の極限の積には一致しないからである．$|t| \to \infty$ での漸近カレントは相互作用 Hamiltonian の漸近形から読み取る．以下，これを行う．

まず QED における相互作用 Hamiltonian は次式で与えられる：

$$H_{\mathrm{int}}(t) = -e \int_{x^0=t} d^3\boldsymbol{x}\, A_\mu(x) J^\mu_{\mathrm{mat}}(x) \tag{16}$$

但し，$J^\mu_{\mathrm{mat}}(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ である．これに次の相互作用描像における場の演算子 $\psi(x)$ と $A_\mu(x)$ を代入する：

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{s=\pm} \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \\ &\quad \times \left(b_s(\boldsymbol{p}) u_s(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{ip\cdot x} + d^\dagger_s(\boldsymbol{p}) v_s(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{-ip\cdot x}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= \sum_{\lambda=\pm} \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \\ &\quad \times \left(a_\lambda(\boldsymbol{k}) \epsilon^{(\lambda)}_\mu(\boldsymbol{k}) \mathrm{e}^{ik\cdot x} + a^\dagger_\lambda(\boldsymbol{k}) \epsilon^{(\lambda)*}_\mu(\boldsymbol{k}) \mathrm{e}^{-ik\cdot x}\right) \end{aligned} \tag{18}$$

但し，$\omega_k = |\boldsymbol{k}|$，$p^0 = \sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2}$ である．これらを式 (16) に代入して極限 $|t| \to \infty$ を取ると，近似の最低次で $H_{\mathrm{int}}(t)$ は次の演算子に漸近することが証明できる：

$$H_{\mathrm{int}}(t) \to -e \int_{x^0=t} d^3\boldsymbol{x}\, A_\mu(x) J^{\mu\,(\mathrm{asymp})}_{\mathrm{mat}}(x) \tag{19}$$

ここで，$J^{\mu\,(\mathrm{asymp})}_{\mathrm{mat}}(x)$ は次式で与えられる演算子である：

$$J^{\mu\,(\mathrm{asymp})}_{\mathrm{mat}}(x) = \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \frac{p^\mu}{p^0} \rho(\boldsymbol{p}) \delta^{(3)}\!\left(\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{p}}{p^0} t\right) \tag{20}$$

但し，$\rho(\boldsymbol{p}) = \sum_{s=\pm}(b^\dagger_s(\boldsymbol{p}) b_s(\boldsymbol{p}) - d^\dagger_s(\boldsymbol{p}) d_s(\boldsymbol{p}))$ とした．式 (20) が QED の物質場の漸近カレントである．ここで，式 (20) 自身は軟光子定理とは全く別の文脈の先行研究 [6, 7] で既に導出されていることを強調しておく．また Strominger ら [1] の解析法はこの漸近カレントを使ったものではなく，もっと難解な理論を持ち出した方法である，ということも強調しておく．

４．まとめと今後の展望

QED では $F^{\mu\nu}$ の反対称性の帰結として，式 (6) のような任意関数 Λ を含む保存カレントが存在する．また，この保存カレントから導かれる形式的な保存電荷 $Q[\Lambda]$ は，適当な仮定の下で確かに積分が収束し，無限個の保存電荷 Q_{lm} が存在し得ることが言える．この無限個の保存電荷は Balachandran ら [5] および Strominger ら [1] が指摘するまでは細かく考えられて来なかったものである．

今後は式 (20) で導出した漸近カレント $J^{\mu\,(\mathrm{asymp})}_{\mathrm{mat}}(x)$ を用いて，Ward-Takahashi 恒等式 $Q^+[\Lambda]S = SQ^-[\Lambda]$ と軟光子定理の等価性の証明に着手する予定である．これは Strominger らの方法とは異なる．また、漸近カレントの表式 (20) は近似の最低次によるものなので，この近似の精度を上げることで近似の次の次数での軟光子定理 [3] が求められるかどうかも確認したいと考えている．

参考文献

[1] T. He, P. Mitra, A. P. Porfyriadis and A. Strominger, JHEP **1407**, 3789 (2014).

[2] J. M. Jauch and F. Rohrlich, “Theory of Photons and Electrons,” (Addison-Wesley Publishing, 1955), p. 392.

[3] F. E. Low, Phys. Rev. **110**, 974 (1958).

[4] S. Weinberg, Phys. Rev. **135**, B1049 (1964).

[5] A. P. Balachandran and S. Vaidya, Eur. Phys. J. Plus **127**, 128 (2013).

[6] P. P. Kulish and L. D. Faddeev, Theor. Math. Phys. **4**, 745 (1970).

[7] R. Horan, M. Lavelle, and D. McMullan, Pramana **51**, 317 (1998).