O-17

修正されたBatemanラグランジアンに基づく減衰調和振動子の考察

A study of the damped harmonic oscillator based on a modified Bateman Lagrangian

○藤原侑樹 [1], 出口真一 [2]
*Yuki Fujiwara[1], Shinichi Deguchi[2]

Abstract : We study analytical mechanics and canonical quantization of the damped harmonic oscillator on the basis of a modified Bateman Lagrangian.

1．導入

本研究の目的は, 散逸系の簡単な例の一つである減衰調和振動子の解析力学を考察して, それに基づき量子化を論じることである. 減衰調和振動子の運動方程式は

$$m\ddot{x}+\gamma\dot{x}+kx=0,\quad 4mk>\gamma^2 \tag{1}$$

と与えられる. ここで, $x=x(t)$ は質点の座標, m は質点の質量, γ は減衰係数, k はばね定数である. 式 (1) を導くあらわに時間に依存しないラグランジアンとして, Bateman ラグランジアン

$$L_{\mathrm{B}}=m\dot{x}\dot{y}+\frac{\gamma}{2}(x\dot{y}-\dot{x}y)-kxy \tag{2}$$

が知られている [1, 2]. ここで, y は x の時間反転に対応する新たな座標変数である. 式 (2) から, 式 (1) と増幅振動の運動方程式 $m\ddot{y}-\gamma\dot{y}+ky=0$ が導かれる. 従って, 式 (2) は互いに独立な減衰振動と増幅振動を同時に記述することがわかる. 一方, 式 (2) に基づき量子化を行うと, 減衰振動の振幅 x と増幅振動の振幅 y の一次結合が基本的な力学変数となり, 減衰振動の自由度のみを扱うことが困難になることが知られている [2, 3].

これを踏まえて, 本研究では Bateman ラグランジアンを修正することで, 減衰振動のみを記述できるあらわに時間に依存しないラグランジアンを構成し, これに基づき, 減衰調和振動子の古典論と量子論を論じる.

2．修正された Bateman ラグランジアンの解析力学

上述の x と y に加えて, 新たに変数 ρ, σ, λ を導入する. そして, 式 (2) に新たな項を加え, Bateman ラグランジアンを次のように修正する:

$$L=L_{\mathrm{B}}-\frac{1}{2}(\rho\dot{\sigma}-\dot{\rho}\sigma)-\frac{\gamma}{2m}\rho\sigma+\lambda(x\rho-y\sigma). \tag{3}$$

式 (3) から導かれる Euler-Lagrange 方程式を連立させると, 減衰振動の運動方程式 (1) と $\lambda=0$, $\dot{\sigma}+\frac{\gamma}{2m}\sigma=0$, $\dot{\rho}-\frac{\gamma}{2m}\rho=0$ が得られる. 式 (1) が導かれることから, 式 (3) は減衰振動を記述するラグランジアンであることがわかる. 式 (2) の場合とは異なり, 式 (3) からは $x\rho-y\sigma=0$ が導かれ, 結果として, 減衰振動と増幅振動の自由度が新たな変数を介して互いに関係する.

式 (3) で記述される系は拘束系となるため, Dirac の手法に従い正準形式を構成する. 正準座標は x, y, ρ, σ, λ であり, これらに対応する正準運動量は $p_x=m\dot{y}-\frac{\gamma}{2}y$, $p_y=m\dot{x}+\frac{\gamma}{2}x$, $p_\rho=\frac{1}{2}\sigma$, $p_\sigma=-\frac{1}{2}\rho$, $p_\lambda=0$ と得られる. 以上の結果を基に, Dirac の手法に従うと, 拘束条件 $\phi_1:=p_\rho-\frac{1}{2}\sigma\approx 0$, $\phi_2:=p_\sigma+\frac{1}{2}\rho\approx 0$, $\phi_\lambda:=p_\lambda\approx 0$, $\chi:=x\rho-y\sigma\approx 0$, $\psi:=\rho p_y-\sigma p_x\approx 0$, $\Omega:=\lambda\approx 0$ が導かれる. これらの拘束条件はすべて第 2 類拘束条件であるので, Dirac 括弧を定義して拘束条件を処理する. このとき, 独立変数を x, p_x, ρ, σ と選ぶと, Dirac 括弧は $\{x,p_x\}_{\mathrm{D}}=\frac{1}{2}$, $\{x,\rho\}_{\mathrm{D}}=-\frac{x}{2\sigma}$, $\{x,\sigma\}_{\mathrm{D}}=-\frac{x}{2\rho}$, $\{p_x,\rho\}_{\mathrm{D}}=\frac{p_x}{2\sigma}$, $\{p_x,\sigma\}_{\mathrm{D}}=\frac{p_x}{2\rho}$, $\{\rho,\sigma\}_{\mathrm{D}}=1$ となり, 全ハミルトニアンは

$$H_{\mathrm{T}}=\frac{1}{m}\frac{\sigma}{\rho}p_x^2+m\omega^2\frac{\rho}{\sigma}x^2+\frac{\gamma}{2m}\rho\sigma \tag{4}$$

と求まる. ここで, $\omega:=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\gamma^2}{4m^2}}$ である. いま, H_{T} の正定値性を保証するため, 条件 $\rho\sigma>0$ を課す. 次に, 新たな正準変数 $X:=\sqrt{2}x$, $P_X:=\sqrt{2}p_x$, $\theta:=\frac{1}{2}\ln\frac{\rho}{\sigma}$, $N:=\rho\sigma$ を定義し, 変数変換を行う. このとき, Dirac 括弧は $\{X,P_X\}_{\mathrm{D}}=1$, $\{X,N\}_{\mathrm{D}}=-X$, $\{P_X,N\}_{\mathrm{D}}=P_X$, $\{\theta,N\}_{\mathrm{D}}=1$ となり, 式 (4) は

$$H_{\mathrm{T}}=\frac{1}{2m}\mathrm{e}^{-2\theta}P_X^2+\frac{m\omega^2}{2}\mathrm{e}^{2\theta}X^2+\frac{\gamma}{2m}N \tag{5}$$

と書き換えられる. Dirac 括弧と式 (5) を用いると, 正準方程式 $\dot{X}=\frac{1}{m}\mathrm{e}^{-2\theta}P_X-\frac{\gamma}{2m}X$, $\dot{P}_X=-m\omega^2\mathrm{e}^{2\theta}X+\frac{\gamma}{2m}P_X$, $\dot{\theta}=\frac{\gamma}{2m}$, $\dot{N}=0$ が得られ, θ と N は $\theta=\frac{\gamma}{2m}t+\theta_0$, $N=N_0$ のように定まる. ここで, θ_0 と N_0 は定数である.

式 (5) の時間微分をとると $\frac{d}{dt}H_{\mathrm{T}}=0$ となり, H_{T} は保存量であることがわかる. いま, 正準方程式を用いて, H_{T} を $X,\dot{X},\theta,N$ で表す. このとき, H_{T} を $H_{\mathrm{T}}=E_1+E_2$ のように, 調和振動子の力学的エネルギー $E_1:=\frac{m}{2}\dot{X}^2+\frac{m\omega_0^2}{2}X^2$ $\left(\omega_0:=\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$ とその他の部分

$$E_2:=(\mathrm{e}^{2\theta}-1)\left(\frac{m}{2}\dot{X}^2+\frac{m\omega_0^2}{2}X^2\right)+\frac{\gamma}{2}\mathrm{e}^{2\theta}X\dot{X}+\frac{\gamma}{2m}N \tag{6}$$

に分ける. 一方で, 式 (1) を X を用いて書いた $m\ddot{X}+\gamma\dot{X}+kX=0$ に $\dot{X}$ を掛けて, 時刻 0 から t まで積分をすると, エネルギー積分が次のように求まる：

$$E=\frac{m}{2}\dot{X}^2+\frac{m\omega_0^2}{2}X^2+\int_0^t\gamma\dot{X}^2(s)ds+C. \tag{7}$$

ここで, C は積分定数である. 式 (7) の右辺第 1 項と第 2 項の和は調和振動子の力学的エネルギー E_1 であり, 第 3 項

[1] 日大理工・院 (後)・量子　[2] 日大・教員・量科研

は発生する熱エネルギーを表す. いま, 式 (7) の熱エネルギー部分と式 (6) に, 具体的な解 $X = A\mathrm{e}^{-\theta}\sin(\omega t + \alpha)$ (A と α は定数), $\theta = \frac{\gamma}{2m}t + \theta_0$, $N = N_0$ を代入すると, 定数項は別として 2 つの式は一致する. このように, E_2 は熱エネルギーを表すことが確かめられる. 以上のことから, 全ハミルトニアン H_{T} は調和振動子の力学的エネルギー E_1 と発生する熱エネルギー E_2 の和であり, 全エネルギーを表すことがわかる.

3．減衰調和振動子の量子化

正準変数 X, P_X, θ, N を演算子 $\hat{X}$, $\hat{P}_X$, $\hat{\theta}$, $\hat{N}$ に置き換え, 上述の Dirac 括弧を交換関係 $[\hat{X}, \hat{P}_X] = i\hbar$, $[\hat{X}, \hat{N}] = -i\hbar\hat{X}$, $[\hat{P}_X, \hat{N}] = i\hbar\hat{P}_X$, $[\hat{\theta}, \hat{N}] = i\hbar$ に置き換えることで減衰調和振動子の量子化を行う. 式 (5) から, ハミルトニアン演算子は次のように定まる:

$$\hat{H}_{\mathrm{T}} = \frac{1}{2m}\mathrm{e}^{-2\hat{\theta}}\hat{P}_X^2 + \frac{m\omega^2}{2}\mathrm{e}^{2\hat{\theta}}\hat{X}^2 + \frac{\gamma}{2m}\hat{N}. \tag{8}$$

また, Heisenberg 方程式は $\dot{\hat{X}}(t) = \frac{1}{m}\mathrm{e}^{-2\hat{\theta}(t)}\hat{P}_X(t) - \frac{\gamma}{2m}\hat{X}(t)$, $\dot{\hat{P}}_X(t) = -m\omega^2\mathrm{e}^{2\hat{\theta}(t)}\hat{X}(t) + \frac{\gamma}{2m}\hat{P}_X(t)$, $\dot{\hat{\theta}}(t) = \frac{\gamma}{2m}$, $\dot{\hat{N}}(t) = 0$ と得られ, $\hat{\theta}(t)$ と $\hat{N}(t)$ が $\hat{\theta}(t) = \frac{\gamma}{2m}t + \hat{\theta}_0$, $\hat{N}(t) = \hat{N}_0$ と定まる. ここで, $\hat{\theta}_0$ と $\hat{N}_0$ は時間に依存しない演算子である.

いま, 力学的エネルギー E_1 を正準変数で表した後に, これらの変数を対応する演算子に置き換えて Weyl 順序をとることで, エネルギー演算子

$$\begin{aligned}\hat{E}_1 := &\frac{1}{2m}\mathrm{e}^{-4\hat{\theta}(t)}\hat{P}_X^2(t) + \left(\frac{m\omega_0^2}{2} + \frac{\gamma^2}{8m}\right)\hat{X}^2(t)\\ &- \frac{\gamma}{4m}\mathrm{e}^{-2\hat{\theta}(t)}\left\{\hat{X}(t)\hat{P}_X(t) + \hat{P}_X(t)\hat{X}(t)\right\}\end{aligned} \tag{9}$$

を定義する. 次に, 演算子 $\hat{a}(t)$ と $\hat{a}^\dagger(t)$ を

$$\hat{a}(t) := \sqrt{\frac{m\omega_+}{2\hbar}}\Lambda^*\mathrm{e}^{\hat{\theta}(t)}\hat{X}(t) + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega_+}}\Lambda\mathrm{e}^{-\hat{\theta}(t)}\hat{P}_X(t), \tag{10a}$$

$$\hat{a}^\dagger(t) := \sqrt{\frac{m\omega_+}{2\hbar}}\Lambda\mathrm{e}^{\hat{\theta}(t)}\hat{X}(t) - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega_+}}\Lambda^*\mathrm{e}^{-\hat{\theta}(t)}\hat{P}_X(t) \tag{10b}$$

と定義する. ここで, $\omega_+ := \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4m^2}}$, $\Lambda := \cosh\varphi + i\sinh\varphi$ であり, $\cosh\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\omega_+}{\omega_0}\right)}$, $\sinh\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}\left(-1 + \frac{\omega_+}{\omega_0}\right)}$ である. また, $\hat{a}(t)$ と $\hat{a}^\dagger(t)$ の同時刻交換関係は $\left[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)\right] = 1$ となる. いま, 真空状態 $|0, t\rangle$ を

$$\hat{a}(t)|0, t\rangle = 0, \tag{11}$$

$$\hat{\theta}_0|0, t\rangle = 0 \tag{12}$$

で定義し, 規格化条件 $\langle 0, t|0, t\rangle = 1$ を課す. 式 (11) と交換関係 $\left[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)\right] = 1$ から, $\hat{a}(t)$ は消滅演算子であり, $\hat{a}^\dagger(t)$ は生成演算子であることがわかる. 式 (12) は, $\gamma = 0$ の場合にエネルギー固有値が減衰のない調和振動子のエネルギー固有値に帰着するために要請される. 式 (9) を $\hat{a}(t)$ と $\hat{a}^\dagger(t)$ で書き換えると

$$\hat{E}_1 = \hbar\omega_0\mathrm{e}^{-2\hat{\theta}(t)}\left\{\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) + \frac{1}{2}\right\} \tag{13}$$

となる. 次に, Fock 基底 $|n, t\rangle$ を

$$|n, t\rangle := \frac{1}{\sqrt{n!}}\left\{\hat{a}^\dagger(t)\right\}^n|0, t\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{14}$$

のように定義する. 式 (11)∼(14) と, $\hat{a}(t)$ と $\hat{a}^\dagger(t)$ の交換関係から, $\hat{E}_1$ の固有値が

$$E_{1,n}(t) = \hbar\omega_0\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{m}t}\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{15}$$

と求まる. 式 (15) は通常の調和振動子のエネルギー固有値に, 時間経過と共に減衰する係数 $\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{m}t}$ を掛けたものである. また, 式 (15) に付随した固有関数は

$$\begin{aligned}\phi_n(X, t) = &f_n H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2m}t}X\right)\\ &\times\exp\left[\frac{\gamma}{4m}t - \frac{m}{2\hbar}\left(\omega_0 - i\frac{\gamma}{2m}\right)\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{m}t}X^2\right]\end{aligned} \tag{16}$$

のように求まる. ここで, $\phi_n(X, t) := \langle X|\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{\mathrm{T}}t}|n, t\rangle$ であり, f_n は規格化定数, H_n は Hermite 多項式である. 式 (16) は規格化条件 $\int_{-\infty}^{\infty}|\phi_n(X, t)|^2 dX = 1$ を満たす. 特に, 基底状態の固有関数 ϕ_0 の絶対値二乗は

$$|\phi_0(X, t)|^2 = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}}\exp\left[\frac{\gamma}{2m}t - \frac{m\omega_0}{\hbar}\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{m}t}X^2\right] \tag{17}$$

である. 式 (17) は $t \to \infty$ の極限で, 原点 $X = 0$ では無限大になり, 原点以外 $X \neq 0$ では 0 になる. 従って, 式 (17) は, 初期時刻 $t = 0$ でガウス関数であり, 時間経過と共にデルタ関数に近づく.

4．まとめと今後の課題

本研究では, 修正された Bateman ラグランジアン (3) を提案し, それに基づき, 減衰調和振動子の古典論と量子論を論じた. このラグランジアンを採用することで, 減衰振動と増幅振動の自由度が互いに関係して, 本質的に減衰振動のみを記述することができた. また, このラグランジアンから, 時間に依らない全ハミルトニアン H_{T} を求め, それを力学的エネルギー E_1 と発生する熱エネルギー E_2 に分解することができた. さらに, 量子論において, エネルギー演算子 $\hat{E}_1$ に関する固有値問題を解いた. その結果, 時間経過と共に減衰する固有値 (15) が得られ, 基底状態の固有関数の絶対値二乗は, 時間経過と共にデルタ関数に近づくことがわかった. 今後の課題として, 量子状態の時間発展をより詳細に論じることが挙げられる.

参考文献

[1] H. Bateman, Phys. Rev. **38** 815, (1931).

[2] H. Feshbach, Y. Tikochinsky, Trans. N. Y. Acad. Sci. **38** 44, (1977).

[3] S. Deguchi, Y. Fujiwara, K. Nakano, arXiv: 1807.04403 [quant-ph].