

連星ブラックホール合体の重力波シミュレーション

A simulation of gravitational waves from emerging Black-Hole binaries

○目迫 優¹, 岩本弘一²*Yu Mesaku¹, Koichi Iwamoto²

Abstract: We study the gravitational waves from black hole (BH) binaries by numerical simulations of general relativity. The evolution equation system is based on Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura (BSSN) formulation adapting 1+log lapse and gamma-driver shift conditions. The divergences at BH singularities are avoided by the use of moving puncture method (Campanelli 2006), instead of excising the domains within apparent horizons. We assume that BHs are equal-mass, non-spinning and use conformally flat initial conditions.

1. はじめに

BH の内部には特異点が存在する. 数値計算を行う上で, 空間的超曲面がこの点に接すると, 数値破綻を起こしてしまう. したがって, シミュレーションを行うためには, 特異点を回避するような手法を用いる必要がある. 連星 BH のシミュレーションでは, 特異点を計算領域から切り取る方法+共回転のゲージ条件を用いて, 安定的な計算を行っていた. しかし Campanelli らは, これらの手法を使わず連星 BH の計算が行える Moving Puncture 法[1]を考案した. Puncture とは, 共形因子を発散項とそれ以外に分けたときの, 前者のことである. この方法は特異点が収束するような手法をとっているため, Horizon の対処が非常に容易になった.

本研究ではこの方法を用いて, 合体する等質量の連星 BH が放出する重力波についてのシミュレーションを行う. 発展方程式には BSSN 方程式[2]を用いる. また, 以下では c (光速) = G (万有引力定数) = 1とする.

2. 発展方程式

BSSN 方程式は, ADM 形式[3]を共形因子 $\psi = e^\phi$ で共形変換した形式である. しかし特異点が存在する場合には, 共形因子が発散してしまう. これを回避するために, 新しい変数 $\chi = e^{-4\phi}$ を導入することによって解決する. この変数で書き換えた BSSN 方程式は以下のようになる.

$$\partial_0 \tilde{\gamma}_{ij} = -2\alpha \tilde{A}_{ij} \quad (1)$$

$$\partial_t \chi = \frac{2}{3} \chi (\alpha K - \partial_i \beta^i) + \beta^i \partial_i \chi \quad (2)$$

$$\partial_0 \tilde{A}_{ij} = \chi (-D_i D_j \alpha + \alpha R_{ij})^{TF} + \alpha (K \tilde{A}_{ij} - 2 \tilde{A}_{ik} \tilde{A}^k_j) \quad (3)$$

$$\partial_0 K = -D^i D_i \alpha + \alpha \left(\tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3} K^2 \right) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\Gamma}^i = & \tilde{\gamma}^{jk} \partial_j \partial_k \beta^i + \frac{1}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j \partial_k \beta^k + \beta^j \partial_j \tilde{\Gamma}^i - \tilde{\Gamma}^j \partial_j \beta^i \\ & + \frac{2}{3} \tilde{\Gamma}^i \partial_j \beta^j - 2 \tilde{A}^{ij} \partial_j \alpha \\ & + 2\alpha \left(\tilde{\Gamma}^i_{jk} \tilde{A}^{jk} + 6 \tilde{A}^{ij} \partial_j \phi - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j K \right) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\partial_0 \alpha = -2\alpha K \quad (6)$$

$$\partial_t \beta^i = B^i, \quad \partial_t B^i = \frac{3}{4} \partial_t \tilde{\Gamma}^i - \eta B^i \quad (7)$$

(1)~(5)が発展方程式であり, (6), (7)はラプス関数 α の条件(1+log slicing), シフトベクトル β^i の条件(Gamma-Driver condition)である. D_i は共変微分, $\partial_0 = \partial_t - L_\beta$, L_β はリー微分である. TF はテンソルの Trace-Free Part (例えば, $R_{ij}^{TF} = R_{ij} - \gamma_{ij} R/3$)を示している. ここで, $\tilde{\gamma}_{ij}$ は3次元計量, K は外的曲率, \tilde{A}_{ij} は外的曲率の TF, $\tilde{\Gamma}^i (= -\partial_j \tilde{\gamma}^{ij})$ はガンマドライバー, $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ は $\tilde{\gamma}_{ij}$ でのクリストッフェル記号である. また, 文字の上の \sim (チルダ)は $e^{-4\phi}$ で共形変換されていることを表す.

拘束条件は以下のような, ハミルトニアン拘束条件, 運動量拘束条件がある.

$$R - K_{ij} K^{ij} + K^2 = 0 \quad (8)$$

$$D_j K^j_i - D_i K = 0 \quad (9)$$

初期条件はこれらを満たすように設定する.

3. 初期値の設定

共形因子 ψ を用いて3次元計量 γ_{ij} および外的曲率 A_{ij} に対して, 以下のような共形変換を施す[4].

$$\gamma_{ij} = \psi^4 \eta_{ij}, \quad A_{ij} = \psi^{-2} \tilde{A}_{ij}$$

ここで η_{ij} はミンコフスキー計量である. これを(8), (9)式に代入すると,

$$\Delta\psi + \frac{1}{8}\bar{A}_{ij}\bar{A}^{ij}\psi^{-7} = 0 \quad (10)$$

となる．ここで Δ は平坦な空間でのラプラシアンである．また \bar{A}^{ij} は(9)式から，運動量 P^i と Puncture からの距離 r と法線ベクトル $n^i(=x^i/r)$ を用いて，以下のように与えられる[2]．

$$\bar{A}^{ij} = \frac{3}{2r^2} [P^i n^j + P^j n^i - (\eta^{ij} - n^i n^j) P^k n_k] \quad (11)$$

(10)式には特異点を含んでいるため解けない． ψ を解析的な BH 解($1/\alpha$)と補正項 u の和で書き直すことによって，この問題を解決する． $1/\alpha$ には以下のような，漸近的に平坦になるような解を使う[4]．

$$\psi = \frac{1}{\alpha} + u, \quad \frac{1}{\alpha} = \sum_{i=1}^2 \frac{m_{(i)}}{2|\vec{r} - \vec{r}_{(i)}|} \quad (12)$$

ここで $m_{(i)}$, $\vec{r}_{(i)}$ は Puncture の ADM 質量，位置座標である．(12)式を(13)式に代入することによって，次のような u に関する非線形ポアソン方程式になる．

$$\Delta u + \beta(1 + \alpha u)^{-7} = 0, \quad \beta = \frac{1}{8}\alpha^7 \bar{A}_{ij} \bar{A}^{ij} \quad (13)$$

u は正則であるため，全範囲で積分可能である．したがって， ψ の初期値は(13)式を解くことによって決まる．境界条件は，無限遠で ψ は漸近的に平坦になると考えられるため， $u - 1 = O(r^{-1})$ になる必要がある．したがって，

$$u|_{\text{boundary}} = 1 + \frac{\epsilon}{r} \quad (14)$$

ここで ϵ は微小な値であり，本研究では 0.1 とした．

4. 計算結果

本稿では，生成した初期値の結果を示す．(11)式中の運動量，Puncture の位置座標，質量のパラメータは，Innermost Stable Circular Orbit(ISCO)の値を使用する[1]．

$$P/M = 0.335, \quad Y/M = \pm 1.1515, \quad m_{(i)} = 0.45M \quad (15)$$

計算領域は $-3 \leq x, y, z \leq 3$ であり，グリッド数はそれぞれ 30 である．以上のパラメータから(13)式を解き，得られた補正項 u から共形因子 ψ および外的曲率 \bar{A}_{ij} の初期値を求める． xy 平面($z = 0$)の ψ , \bar{A}_{ij} をそれぞれ Figure1, Figure2 に示す．数値的安定性を保つために， $\chi > \epsilon h^4$ を課し，満たさない場合はカットオフをする．ここで h は空間の刻み幅， ϵ は任意の微小な値である．

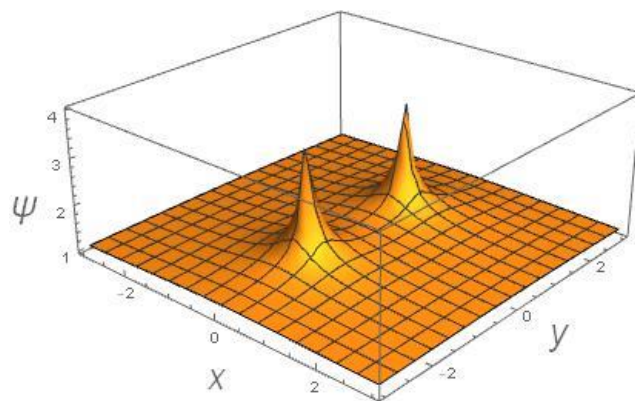


Figure1. Contour of ψ on $z = 0$

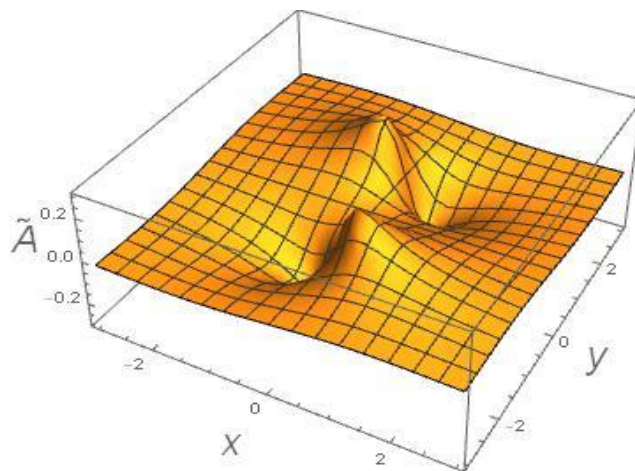


Figure2. Contour of \bar{A}_{ij} on $z = 0$

5. 今後の展望

本稿では初期値の生成のみを示した．現在この初期値から BSSN 方程式により，各物理量の時間変化を調べている．長時間の計算が不安定であるため，コードの修正をしていく．また，その後は重力波の 2つのモード（+モードと×モード）の振幅の抽出を行う．

6. 参考文献

- [1] M.Campanelli, C.O.Lousto, P.Marronetti and Y.Zlochower: Phys. Rev. Lett. 96, 111101/1-4, 2006.
- [2] M.Shibata and T.Nakamura: Phys. Rev. D 52, 5428, 1995.
- [3] T. W. Baumgarte and S. L. Shapiro: Phys. Rev. D 59, 024007, 1999.
- [4] Steven Brandt and Bernd Brügmann: Phys. Rev. Lett. 78, 3606-3609, 1997.