P-2

オービフォールドによる平面結晶群の分類
Classification of Wallpaper Groups by Orbifolds

○高橋 篤永 [1]
*Atsuhisa Takahashi[1]

Abstract: Classification of wallpaper groups is done by algebraic method. In this paper, we use geometric method. We focus on the orbit spaces of group actions, that is to say orbifolds. Classification of wallpaper groups is reduced to classification of closed orbifolds modeled on the Euclidean plane.

1. 平面結晶群

定義 1.1 (平面結晶群) ユークリッド平面 $\mathbb{E}^2$ の合同変換群の部分群 Γ が**平面結晶群**であるとは Γ が次の 2 つの条件を満たすことである.

1. Γ の作用は不連続である. つまり,$\forall x \in \mathbb{E}^2$ の軌道が集積点をもたない.
2. Γ の要素で平行移動全体のなす群は, 2 つの 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{b}_1$ と $\boldsymbol{b}_2$ についての平行移動で生成される格子群 $\Gamma_{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2}$ である.

定理 1.2 (平面結晶群の分類) 平面結晶群は 17 種類に分類される.

2. 平面結晶群の軌道空間

定義 2.1 (オービフォールド) 距離空間 M が $\boldsymbol{X}$ をモデルとする**オービフォールド**であるとは, M が次の条件を満たすような開集合 $U_i, i \in I$ の和集合として表されることである.

1. $\boldsymbol{X}$ のある点の近傍として表される開集合 $\tilde{U}_i, i \in I$ と連続写像 $p_i : \tilde{U}_i \longrightarrow U_i$ および $\tilde{U}_i$ に作用する $\boldsymbol{X}$ の等長変換からなる有限群 G_i があって, p_i は等長写像
$$\tilde{U}_i/G_i \longrightarrow U_i$$
を導く.
2. $\tilde{U}_i$の点 x_iと$\tilde{U}_j$の点 x_jに対して,$p_i(x_i) = p_j(x_j)$ ならば,x_iを含む$\tilde{U}_i$の開集合$\tilde{V}_i$と x_jを含む$\tilde{U}_j$の開集合$\tilde{V}_j$, および等長写像$\varphi_{ij} : \tilde{V}_i \longrightarrow \tilde{V}_j$で, 全ての $x \in \tilde{V}_i$ に対して
$$p_j \circ \varphi_{ij}(x) = p_i(x)$$
を満たすものが存在する.

補題 2.2 Γ を平面結晶群とする. このとき, 軌道空間 $\mathbb{E}^2/\Gamma$ は $\mathbb{E}^2$ をモデルとするオービフォールドの構造をもつ.

定義 2.3 (特異点) 上の定義 2.1 の条件 1 において有限群 G_i が自明でないとき, その点をタイプ G_i の**特異点**という.

補題 2.4 Γ を平面結晶群とするとき, オービフォールド $\mathbb{E}^2/\Gamma$ の特異点は次のいずれかのタイプである.

1. 巡回群 C_2, C_3, C_4, C_6
2. 二面体群 D_1, D_2, D_3, D_4, D_6

3. 平面結晶群の分類

Γ を平面結晶群とし M をその軌道空間 $\mathbb{E}^2/\Gamma$ とする.

定義 3.1 (オービフォールドオイラー数) M のセル分割で, それぞれのセル e_i について e_i の境界を除くすべての点 x の近傍が同じ有限群 G_i を用いて U/G_i と合同になるようなものをとる. ここで G_i は単位元のみからなる群,$C_n, n = 2, 3, 4, 6$ または,$D_n, n = 1, 2, 3, 4, 6$ のいずれかである. セル σ_i の次元を d_i とおく. このとき M の**オービフォールドオイラー数**を
$$\chi^{orb}(M) = \sum_i (-1)^{d_i} \frac{1}{|G_i|}$$
で定義する. ここで和はすべてのセルについてとる.

補題 3.2 軌道空間 $M = \mathbb{E}^2/\Gamma$ のオービフォールドオイラー数について
$$\chi^{orb}(M) = 0$$
が成り立つ.

<u>高々タイプ C_n の特異点をもつ M の分類</u>

補題 3.3 M が高々タイプ C_n の特異点を持つ場合,M はある閉曲面 Σ と同相で特異点ををそれぞれ $C_{n_1}, \cdots, C_{n_k}$ とするとき, M と同相な閉曲面 Σ のオイラー数は
$$\chi(\Sigma) = \sum_{j=1}^{k} (1 - \frac{1}{n_j})$$
で与えられる.

1: 日大理工・院 (前)・数学

定理 3.4 M が高々タイプ C_n の特異点をもつとする. M の閉曲面としての同相類を Σ とし, 特異点の個数を k, 特異点のタイプを $C_{n_1},\cdots,C_{n_k}$ とする. このようなオービフォールドを記号 $\Sigma(n_1,\cdots,n_k)$ で表すと, これらは $T, K, \mathbb{R}P^2(2,2), S^2(6,3,2), S^2(4,4,2), S^2(3,3,3), S^2(2,2,2,2)$ の 7 通りのいずれかである. ここで T はトーラス,K はクラインの壺,$\mathbb{R}P^2$ は射影平面, S^2 は 2 次元球面で,T と K は特異点をもたない場合である.

証明

M が閉曲面 Σ と同相であるとすると補題 3.3 より Σ のオイラー数は

$$\chi(\Sigma)=\sum_{j=1}^{k}(1-\frac{1}{n_j}) \tag{1}$$

で与えられる. この式より $\chi(\Sigma)\geq 0$ となるが閉曲面の分類より $\chi(\Sigma)=0,1,2$ の場合が考えられる. ここで補題 2.4 と式 (1) より

$$k\leq 2\chi(\Sigma) \tag{2}$$

であることに注意する.

- $\chi(\Sigma)=0$ の場合

  Σ は T または K と同相であるときに限る. このとき式 (2) より $k=0$ となるので, これらの場合は特異点は存在しない.

- $\chi(\Sigma)=1$ の場合

  $\Sigma\cong\mathbb{R}P^2$ であり式 (2) より $k\leq 2$ となる. $k=1$ の場合は式 (1) の解は存在しない. $k=2$ とすると式 (1) の解は $n_1=n_2=2$ である.

- $\chi(\Sigma)=2$ の場合

  $\Sigma\cong S^2$ であり式 (2) より $k\leq 4$ となる. $k=1,2$ の場合は, 式 (1) の解は存在しない. $k=3$ とすると, 式 (1) は

  $$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=1$$

  となり解 (n_1,n_2,n_3) は $(6,3,2),(4,4,2),(3,3,3)$ が得られる. $k=4$ のとき, 式 (1) の解は $n_1=n_2=n_3=n_4=2$ となる.

以上で定理が証明された. ■

タイプ D_n の特異点をもつ M の分類

このとき Γ は鏡映を含み M は境界をもち, 境界上にはタイプ D_1 の特異点がある. そこで M のコピーを 2 つ用意し, それらを対応する境界に沿って貼り合わせて得られるオービフォールドを M の**ダブル**とよび $M\cup M$ で表す.

補題 3.5 上のように構成したダブル $M\cup M$ は,$\mathbb{E}^2$ をモデルとするコンパクトな境界のないオービフォールドで $\chi^{orb}(M\cup M)=0$ を満たし, 高々タイプ C_n の特異点をもつ.

この補題より M を分類するには定理 3.4 で分類した 7 種類のオービフォールドについて鏡映の軸を調べればよいことが分かる. ここでは 2 つの場合について挙げる. ただし $S^2(6,3,2)$ を $S632$, $S^2(4,4,2)$ を $S442$ と表すことにし, D を円盤とする. また, タイプ D_n の特異点を n' で表す.

$S632$ の場合

図 1 のように鏡映の軸をもつ.

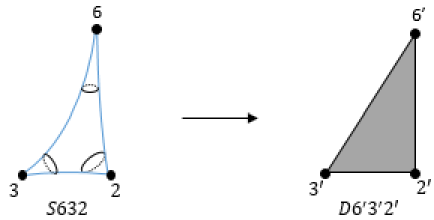

図 1: $S632$ の鏡映対称性

$S442$ の場合

図 2 のように 2 通りの鏡映の軸をもつ.

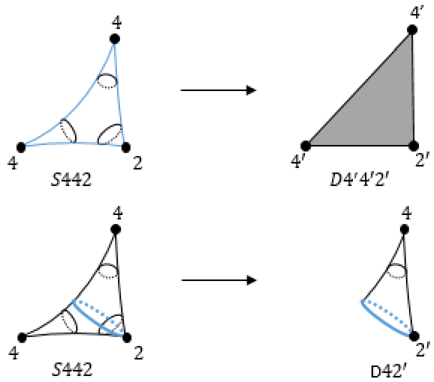

図 2: $S442$ の鏡映対称性

定理 3.4 の他のオービフォールドについても上のように鏡映の軸を調べることで, タイプ D_n の特異点をもつオービフォールドが 10 通りであることが示せる. 高々タイプ C_n の特異点をもつ場合と合わせると, オービフォールドは全部で 17 種類あり, これらはすべて平面結晶群 Γ の軌道空間 $\mathbb{E}^2/\Gamma$ として実現される. よって定理 1.2 が示せた.

4. 参考文献

[1] 河野俊丈, 結晶群, 共立出版,2015

[2] 川崎徹郎, 文様の幾何学, 牧野書店,2014