P-4

p 次錐の自己同型群

The automorphism group of p-th order cones

○伊藤勝 [1]，　ロウレンソ ブルノ フィゲラ [2]
*Masaru Ito[1],　Bruno Figueira Lourenço[2]

Abstract:　For $p \in [1, \infty]$, the p-th order cone $K_{n,p}$ is the epigraph of ℓ_p-norm in $\mathbb{R}^{n-1}$. In 2014, Gowda and Trott proved that any automorphism of $K_{n,p}$ for $p \in \{1, \infty\}$ is a positive scalar multiplication of a generalized permutation matrix fixing the main axis. In this work, we determine the structure of the automorphism group of the p-th order cone $K_{n,p}$ for $p \in [1, \infty], p \neq 2$. We prove that the automorphism group of $K_{n,p}$ for any $p \neq 2$ coincides with the one of $K_{n,1}$.

1. はじめに

$p \in [1, \infty]$ に対する p **次錐** は次のように定義される.

$$K_{n,p} := \left\{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \;\middle|\; t > \|x\|_p\right\}, \quad p \in [1, \infty].$$

ここで $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ および $\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_{n-1}|^p)^{1/p}, p \neq \infty$ である.

p 次錐のうち, 二次錐は他の p 次錐と比べて多くの数学的な性質が明らかになっており, 最適化への応用も非常に活発である. 二次錐以外の p 次錐についても (例えば施設配置や金融工学への) 重要な応用を持ち, 最適化手法の開発のためには p 次錐の数学的構造を調べることが重要である. 本研究では, 二次錐以外の p 次錐について, 自己同型群の構造を決定する.

$K, K' \subset \mathbb{R}^n$ を凸錐とし (すなわち K は凸集合かつ $\alpha K \subset K, \forall \alpha > 0$ を満たす), 内点をもち直線を含まないものとする. K と K' が**同型**であるとは, ある $A \in GL(n, \mathbb{R})$ が存在して $AK = K'$ となることである (A を同型写像と呼ぶ). K から K 自身への同型写像 (すなわち K の自己同型写像) 全体の集合を $\mathrm{Aut}(K)$ とかく. また, K が**等質**であるとは, 任意の $u, v \in \mathrm{int}\, K$ に対して $A \in \mathrm{Aut}(K)$ が存在して $Au = v$ となることである. 錐の等質性は, 最適化においては内点法といったアルゴリズムの開発などに重要な役割を果たす [2]. 特に二次錐は等質錐である.

Gowda と Trott [1] は p 次錐やその一般化の性質を調べ, 特に $p = 1, \infty$ に対しては自己同型群の構造を明らかにした.

定理 1 (Gowda and Trott [1]) $n \geq 3$ に対して,

$$\mathrm{Aut}(K_{n,1}) = \mathrm{Aut}(K_{n,\infty}) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}(\sigma)P \end{pmatrix} :\ \alpha > 0,\ \sigma \in \{-1, 1\}^n,\ P : \text{置換行列} \right\}.$$

ここで $\mathrm{diag}(\sigma)$ はベクトル σ の要素を対角成分に並べた対角行列である.

この定理から $K_{n,1}$ および $K_{n,\infty}$ が等質錐でないことが示される. 実際, $u = (1, 0, \ldots, 0), v \notin \{\alpha(1, 0, \ldots, 0) \mid \alpha \geq 0\}$ ととれば任意の $A \in \mathrm{Aut}(K_{n,1}) = \mathrm{Aut}(K_{n,\infty})$ に対して $Au \neq v$ である.

2. 主結果

本研究では p 次錐の自己同型群の構造を示した.

定理 2 (主結果) $n \geq 3, p \in [1, \infty], p \neq 2$ に対して

$$\mathrm{Aut}(K_{n,p}) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}(\sigma)P \end{pmatrix} :\ \alpha > 0,\ \sigma \in \{-1, 1\}^n,\ P : \text{置換行列} \right\}.$$

この結果から, 二次錐以外の p 次錐はすべて同じ自己同型群を持つことが分かる. 二次錐の自己同型群の構造はこれとは異なる [3]: $AK_{n,2} = K_{n,2}$ または $AK_{n,2} = -K_{n,2}$ であることと $A^T J_{n+1} A = \mu J_{n+1}$ となる $\mu > 0$ が存在することは同値である (ただし $J_{n+1} = \mathrm{diag}(1, -1, \ldots, -1)$). また, 二次錐は等質であるが, それ以外の p 次錐は等質でないことも分かる.

1: 日大理工・教員・数学　　2: 東京大学

3. 主結果の証明

主結果の証明は $\mathrm{Aut}(K_{n,p}) = \mathrm{Aut}(K_{n,1})$ を示すことが目標となる. このうち包含関係 $\mathrm{Aut}(K_{n,p}) \supset \mathrm{Aut}(K_{n,1})$ は定理 1 から自明であるから, $\mathrm{Aut}(K_{n,p}) \subset \mathrm{Aut}(K_{n,1})$ を証明すればよい. この包含関係を $n \geq 3$ についての帰納法で示す. さらにこの議論は双対錐を取ることで, $p \in (1,2)$ の場合に限って証明すれば良いことがわかる.

$A \in \mathrm{Aut}(K_{n,p})$ を取る. $A \in \mathrm{Aut}(K_{n,1})$ を示すには, A が $K_{n,1}$ の端線全体の集合 $E(K_{n,1}) = \{\alpha(1, \sigma e_i) \mid \alpha > 0,\ i = 1, \ldots, n,\ \sigma \in \{-1, 1\}\}$ (ただし e_i は $\mathbb{R}^{n-1}$ の単位座標ベクトル) について

$$AE(K_{n,1}) = E(K_{n,1}) \tag{1}$$

を示せばよい ($K_{n,1}$ は $E(K_{n,1})$ の凸包であるため).

まず, p 次錐の境界から原点を除いた集合

$$M := \partial K_{n,p} \setminus \{0\} = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \mid x \neq 0,\ t = \|x\|_p\}$$

を考えると, M は関数 $f_p : \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f_p(x) = \|x\|_p$ のグラフであり, 可微分多様体の構造をもつ. このとき, A は M から M 自身への可微分同相写像となる. このとき, M の C^k 級部分多様体は A によって再び M の C^k 級部分多様体にうつされるから, 以下のことがわかる.

補題 3 上記の M について, 二点 $u = (f_p(x), x), v = (f_p(y), y) \in M$ が $Au = v$ を満たすとする. このときある k に対して, f_p が x の近傍で C^k 級であることと f_p が y の近傍で C^k 級であることは同値である.

ここで, f_p の微分可能性について考える. $p \in (1,2)$ であるとき, f_p が x の近傍で C^2 級であることと $x_1 \cdots x_{n-1} \neq 0$ であることは同値である. したがって補題 3 により

$$AE = E, \quad E = \{(\|x\|_p, x) \mid x \neq 0,\ x_i = 0 \text{ for some } i \in \{1, \ldots, n-1\}\}.$$

いま, $n = 3$ の場合を考えると, $E = E(K_{n,1})$ が成り立ち, (1) が示された.

$n \geq 4$ の場合は, $E = \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i$, $E_i = \{(\|x\|_p, x) \mid x \neq 0,\ x_i = 0\}$ と分割して考えると, ある置換 $\sigma \in S_{n-1}$ に対して $AE_i = E_{\sigma(i)},\ i = 1, \ldots, n-1$ とかけることがわかる. これはひとつ小さな次元での p 次錐の自己同型写像を誘導するから, 帰納法の仮定を用いて, (1) を得ることができる. (証明終)

謝辞

本研究の一部は平成 29 年度日本大学理工学部研究助成 A 「凸最適化問題に対する問題構造を利用した効率的な劣勾配アルゴリズムの構築」を助成を受けたものである.

4. 参考文献

[1] M. S. Gowda and D. Trott, On the irreducibility, Lyapunov rank, and automorphisms of special Bishop-Phelps cones, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **419**(1), pp. 172–184 (2014).

[2] Osman Güler and Levent Tunçel, Characterization of the barrier parameter of homogeneous convex cones, *Mathematical Programming*, **81**(1), pp. 55–76 (1998).

[3] R. Loewy and H. Schneider, Positive operators on the n-dimensional ice cream cone, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **49**(2), pp. 375–392 (1975).

[4] M. Ito and B. F. Lourenço, The automorphism group and the non-self-duality of p-cones, *arXiv*:1808.01578 (2018).