P-5

Hilbert 保型形式の保型 L 関数の中心値の平均について

On averages of central values of automorphic L-functions for Hilbert modular forms

○杉山　真吾 [1]
*Shingo Sugiyama [1]

Abstract: Let F be a finite totally real number field and $\mathbb{A}_F$ the ring of adèles of F. In this talk, we give an asymptotic formula of averages of automorphic L-functions associated with automorphic forms on $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_F)$ with respect to the level. A part of this work is a joint work with Masao Tsuzuki (Sophia University).

1. 保型形式

Hilbert 保型形式は $\mathfrak{H}^{\mathrm{Hom}(F,\mathbb{C})}$ 上の $\mathbb{C}^{h_F}$ 値関数で大きな「対称性」を持つ関数のことである．ここで, $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ は Poincaré 上半平面で, h_F は F の狭義類数である. 以下, 簡単のため $F = \mathbb{Q}$ とする.

$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ は一次分数変換によって, $\mathfrak{H}$ に推移的に作用する : $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] z := \frac{az+b}{cz+d}$. 特に $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ も $\mathfrak{H}$ に作用する.

定義 1 k を自然数とする. 複素関数 $f : \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$ が重さ k の保型形式 *(*楕円モジュラー形式*)* であるとは*, (i)* f は正則*, (ii)* 任意の $z \in \mathfrak{H}$ と任意の $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ に対して*,* $f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^k f(z)$*, (iii)* カスプで "正則".

(iii) の条件については, Fourier 係数を用いて説明する. (ii) より $f(z+1) = f(\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] z) = f(z)$ であり, f は (i) より正則なので, Fourier 級数展開

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^{(k-1)/2} c_f(n) \exp(2\pi\sqrt{-1}nz)$$

をもつ. (iii) の条件は「任意の $n < 0$ で $c_f(n) = 0$」と言い換えることができる. また, 保型形式 f が $c_f(0) = 0$ を満たす時に f をカスプ形式と呼ぶ.

例 2 偶数 $k \geq 4$ に対する *Eisenstein* 級数

$$E_k(z) = \sum_{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}} \frac{1}{(cz+d)^k}$$

は重さ k の保型形式である. これはカスプ形式ではない.

Ramanujan デルタ

$$\Delta(z) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{24} \quad (q := \exp(2\pi\sqrt{-1}z))$$

は重さ *12* のカスプ形式である.

自然数 k, N に対して, 重さ k, レベル N の保型形式を定義することもできる. その際は, $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ の代わりにレベル N の合同部分群 $\Gamma_0(N) = \{\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \mid c \in N\mathbb{Z}\}$ の作用を考えればよい.

重さ k, レベル N のカスプ形式全体のなす $\mathbb{C}$ ベクトル空間を $S_k(N)$ とする. これは有限次元である. $f \in S_k(N)$ に対して,

$$L(s, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_f(n)}{n^s}$$

とおき, f に付随する保型 L 関数と呼ぶ. 定義式は $\mathrm{Re}(s) \gg 1$ の時にしか収束しないが, $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続される.

2. primitive form と Hecke 作用素

primitive form は以下のように定義される. まず $S_k(N)$ 上の内積を

$$(f_1, f_2) = \int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{H}} f_1(z)\overline{f_2(z)} y^k \frac{dxdy}{y^2} \quad (z = x + \sqrt{-1}y)$$

で定める. これは Petersson 内積と呼ばれる. $S_k(N)$ に含まれる new form (レベルが N より低いところから持ち上がって来ないもの) 全体のなす部分空間を $S_k^{\mathrm{new}}(N)$ とおく.

N を割らない素数 p に対して, Hecke 作用素 $T_p \in \mathrm{End}(S_k^{\mathrm{new}}(N))$ を

$$T_p f(z) = p^{(k-1)/2} \{f(pz) + p^{-k} \sum_{b=0}^{p-1} f(\tfrac{z+b}{p})\}$$

で定める. すると, 以下の性質をもつ.

- 素数 p_1, p_2 に対して $T_{p_1} T_{p_2} = T_{p_2} T_{p_1}$
- T_p は Petersson 内積 $(,)$ に関して self-adjoint.

よって, $\{T_p\}_p$ の同時固有ベクトルからなる直交基底 $B_k(N) \subset S_k^{\mathrm{new}}(N)$ がある. ここでは任意の $f \in B_k(N)$ が $c_f(1) = 1$ となるようにとっておく. $B_k(N)$ の元を primitive form と呼ぶ. Hecke 作用素 T_p の定義から直ちに, N を割らない任意の p と $f \in B_k(N)$ に対して $T_p f = c_f(p) f$ が成立することが分かる. また, Deligne によって $c_f(p) \in [-2, 2]$ が示されたことに注意しておく.

1: 日大理工・教員・数学

3. 主結果

導手が D の 2 次 Dirichlet 指標 $\chi : (\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})^\times \to \{\pm 1\}$ をひとつ固定する. D と互いに素な素数 p を一つ固定し, $c_f(p)$ に関する条件付きで保型 L 関数の中心値の平均を考える. レベル N を無限大に飛ばす際に, 次の集合 X の中で動かすことにする:

$$X = \{N \in \mathbb{N} \mid \chi(q) = -1 (\forall q \nmid N : \mathrm{prime}), \chi(-N) = 1\}.$$

定理 3 *([5])* k は 6 以上の偶数とする. $[\alpha, \beta] \subset [-2, 2]$ を任意の 1 点でない閉区間とする. この時,

$$\frac{1}{c(N)} \sum_{\substack{f \in B_k(N) \\ \alpha < c_f(p) < \beta}} \frac{L(1/2, f) L(1/2, f \otimes \chi)}{(f, f)}$$

は $N \in X$, $N \to \infty$ で収束し, 極限値は

$$\frac{2^{2k-1}\pi^{k-1}}{(k-2)!} L(1, \chi) \int_\alpha^\beta d\mu_{p.\chi}(x)$$

となる. ここで,

$$c(N) = \prod_{p^3 \mid N} (1 - (p^2 - p)^{-1}) \prod_{p^2 \mid N, p^3 \nmid N} (1 - p^{-2})$$

とする. また, $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\chi(n)}{n^s}$ とおく. $L(s, f \otimes \chi)$ も $\chi(n) c_f(n)$ を用いて同様に定義する. $d\mu_{p,\chi}(x)$ は $[-2, 2]$ 上の確率測度で,

$$\begin{aligned} d\mu_{p,\chi}(x) =& \frac{p - \chi(p)}{(p^{1/2} + p^{-1/2} - x)(p^{1/2} + p^{-1/2} - \chi(p)x)} \\ & \times \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2\pi} dx \end{aligned}$$

で定義される.

系 4 X の無限部分集合 Λ, *1* 点でない部分区間 $[\alpha, \beta] \subset [-2, 2]$ を任意にとる. $k \geq 6$ は偶数とする. Λ の中でレベルの増大列 $\{N_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ と *primitive form* の族 $\{f_j \in B_k(N_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ があって, $L(1/2, f_j) L(1/2, f_j \otimes \chi) \neq 0$ と $\alpha < c_{f_j}(p) < \beta$ がすべての $j \in \mathbb{N}$ 成り立つ.

$L(1/2, f) \neq 0$ であることと, f から構成される "テータ関数" が非ゼロであることは同値であることが知られているので, 系 4 から, 非ゼロなテータ関数が無限にあることが分かる. また, p を固定して f を動かすと, $c_f(p)$ たちが $[-2, 2]$ の中にぎっしり詰まっていることも分かる (稠密性). このことから, Deligne が示した $c_f(p) \in [-2, 2]$ は最良の評価であることが分かる.

定理 3 は Hilbert 保型形式の枠組みでも記述できる. 先行研究としては, $\chi(-1) = -1$ で N が素数という条件で, 楕円モジュラー形式の場合には Ramakrishnan, Rogawski [2] が, $\chi(-1) = -1$ と同様の条件の下でレベルが square-free の Hilbert 保型形式の場合には Feigon, Whitehouse[1] がある.

正則という条件を捨てて, 実解析的で双曲的 Laplacian $-y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ の固有関数になっているものも保型形式として扱う事ができる. そのような保型形式は Maass 波動形式と呼ばれる.

定理 5 *([4])* 重さ k の保型形式を *even* な *Maass* の波動形式に置き換えた場合にも, 保型 L 関数の中心値の平均のレベルに関する同様の漸近公式が成り立つ.

上の定理はレベルが square-free の場合は都築 [6] によって与えられた.

最後に証明について簡単に触れておく. 漸近公式は, GL(2) とその分裂トーラスに対する相対跡公式を導出することによって得られる (GL$(2, \mathbb{A}_F)$ の表現論と Hilbert 保型形式が対応している事に注意). Hilbert 保型形式の場合の [1] の手法では, $\chi(-1) = -1$ と N が square-free という条件は外すことができない. それは Jacquet-Langlands 対応によって, 相対跡公式の発散する積分をコンパクト集合上の積分に帰着させているからである. しかし, 本研究では, Jacquet-Langlands 対応を使用しない代わりに, 保型 Green 関数を導入し, 積分が発散する場合も積分に意味を持たせる "正規化" を使っている. また, レベルを一般化するために, local new form の理論を用いて, local old form を明示的に構成した [3]. これによりレベルを一般化することができた. 特に $N = q^m$ (q は素数) で $q + m \to \infty$ という極限も扱えるようになった.

4. 参考文献

[1] Feigon, B., Whitehouse, D., *Averages of central L-values of Hilbert modular forms with an application to subconvexity*, Duke. Math. J., **149** (2009), 347–410.

[2] Ramakrishnan, D., Rogawski, J., *Average values of modular L-series via the relative trace formula*, Pure and Appl. Math. Q. **1** No.4, 701–735, 2005.

[3] Sugiyama, S., *Regularized periods of automorphic forms on GL(2)*, Tohoku Math. J. **65**, no.3 (2013), 373–409.

[4] Sugiyama, S., *Asymptotic behaviors of means of central values of automorphic L-functions for GL(2)*, J. Number Theory, **156** (2015), 195–246.

[5] Sugiyama, S., Tsuzuki, M., *Relative trace formulas and subconvexity estimates for L-functions of Hilbert modular forms*, Acta Arith. **176** (2016), 1–63.

[6] Tsuzuki, M., *Spectral means of central values of automorphic L-functions for $GL(2)$*, Mem. Amer. Math. Soc. **235** (1110), 2015.