P-7

# Padé 近似を用いた無理数性の証明について
## Padé approximation and the irrationality

○落合 亮太
Ryota Ochiai[1]

**Abstract**

It is well-known that the transcendence of the number $e$ implies the irrationality of $e$. On the other hand, the irrationality of $e$ follows without assuming the transcendence. For proving the irrationality, there is a fundamental method so-called Padé approximation. In this talk, we introduce how to prove the irrationality of $e$ and also the fact that $e$ does not belong to any quadratic number field, by means of Padé approximation.

## 1 The irrationality of $e$

実数 $a$ が有理数体 $\mathbb{Q}$ に属さないとき，$a$ は無理数であるという．例えば $\sqrt{5}$ が無理数である事実の証明を復習しよう．まず $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$ と仮定し，$\sqrt{5} = \frac{p}{q}$（ただし $p, q$ は互いに素な整数）とおき，その両辺を 2 乗して矛盾を導くという背理法に依る．$5q^2 = p^2$ から $p^2$ が 5 の倍数つまり $p$ が 5 の倍数であることが従い，これより $q$ も 5 の倍数であることがわかり，$\gcd(p, q) = 1$ に矛盾するという論法である．即ち $\sqrt{5}$ が $X^2 = 5$ の根であることを無理数性の証明に用いている．

ところが $e = \lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n$ で定められる Napier の数 $e$ には，このように拠り所となる多項式型の方程式が無い．それは $e$ が超越数つまり有理数係数の一変数多項式の根に決してならないような数であることが知られているために当然なのであるが，そのような数の場合は，無理数性の証明を与えるために Padé 近似もしくは Hermite-Padé 近似と称される手法が有効である．本稿では Padé 近似の紹介を目的として，まず $e$ は無理数であること，次いで $e$ が 2 次の代数的数にならないことを証明する．

**Proposition 1**
$e$ は無理数である．

**Proof**
$e \in \mathbb{Q}$ と仮定する．$e = \frac{p}{q}$ とおくと $(p, q \in \mathbb{Z}, q > 0)$，$qe$ は整数である．従って $q \le N \in \mathbb{Z}$ に対し $N!\,e$ も整数である．指数関数の Taylor 展開 $e^x = \sum_{n\ge 0} \frac{x^n}{n!}$ の式において

$$e = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} + \sum_{k\ge 1} \frac{1}{(N+k)!}$$

であるから，両辺に $N!$ をかけることで次の式を得る；

$$N!\,e - \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!} = \sum_{k\ge 1} \frac{N!}{(N+k)!}\ . \tag{1}$$

ここで (1) の左辺は整数である．また (1) の右辺は正数の和であり，特に 0 にはならない．従ってこの (1) の左辺はどの $N$ に対しても 1 以上である．一方，

$$\begin{aligned}
\frac{(N+k)!}{N!k!} &= \frac{(N+k)\times(N+k-1)\times\cdots\times(N+1)}{k!} \\
&= \left(\frac{N}{k}+1\right)\times\left(\frac{N}{k-1}+1\right)\times\cdots\times(N+1) \\
&\ge \left(\frac{N}{k}+1\right)^k \\
&= \left(\frac{N}{k}\right)^k + k\cdot\left(\frac{N}{k}\right)^{k-1} + \cdots + k\cdot\frac{N}{k} + 1 \\
&\ge N+1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{k\ge 1} \frac{N!}{(N+k)!} &\le \frac{1}{N+1}\sum_{k\ge 1}\frac{1}{k!} \\
&= \frac{e-1}{N+1} \to 0 \qquad (N\to\infty)
\end{aligned}$$

これは (1) の左辺が 1 以上であることに矛盾する．従って $e$ は無理数である．　□

## 2 The number $e$ is not quadratic

まず以下の命題を考えよう．

**Proposition 2**
$m \ge 1, m \in \mathbb{Z}$ に対して $e^{\frac{1}{m}}$ は無理数である．

**Proof**
$e^{\frac{1}{m}} \in \mathbb{Q}$ と仮定し，$e^{\frac{1}{m}} = \frac{p}{q}$ とおく．このとき $\left(e^{\frac{1}{m}}\right)^m = \left(\frac{p}{q}\right)^m \in \mathbb{Q}$ だが，$e$ は無理数であるので矛盾．　□

一方，$e^2$ もまた無理数である証明は，これほどは簡単ではない (*cf.* [3])．以下，1840 年に J. Liouville [2] によって与えられた証明を紹介しよう（*cf.* Ch. Hermite“ces travaux de l'illustre géomètre”）．

**Definition**
$\mathbb{Q}$ 上 2 次の拡大体を $F$ で記す．$a$ が $F\backslash\mathbb{Q}$ の元であるとき，$a$ は quadratic であるという．

$e$ が quadratic とは，$ae^2+be+c = 0,\ \mathbb{Z}^3 \ni (a, b, c), a \ne 0$ を満たすことになるので，これを仮定して矛盾が従えば $e$ が quadratic ではないことが示せる．つまり $e^2$ も無理

[1]日大理工・院 (前)・数学

数である．しかしこの証明に命題 1 と全く同じ手法は適用できない．実際，$e$ が quadratic であると仮定して

$$a\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{2^n}{n!}+\sum_{k\geq 0}\frac{2^{N+1+k}}{(N+1+k)!}\right)+b\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}+\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(N+1+k)!}\right)+c=0$$

の両辺に $N!$ をかけると

$$cN!+\sum_{n=0}^{N}(2^n a+b)\frac{N!}{n!}=-\sum_{k\geq 0}(2^{N+1+k}a+b)\frac{N!}{(N+1+k)!} \tag{2}$$

が得られるが，この (2) の左辺は整数になっても (2) の右辺は $N\to\infty$ のときに 0 に収束しない．しかしこの代わりに次のようにすると証明が可能になる．

**Proposition 3**
$e$ は quadratic でない．

**Proof**
$e\in F$ と仮定して，quadratic の関係式の両辺に $e^{-1}$ をかけて $ae+b+ce^{-1}=0$（$\mathbb{Z}^3\ni(a,b,c), a\neq 0$）と記す．このとき

$$a\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}+\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(N+1+k)!}\right)+b+c\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n!}+\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^{N+1+k}}{(N+1+k)!}\right)=0$$

の両辺に $N!$ をかけることで次の式を得る：

$$bN!+\sum_{n=0}^{N}(a+(-1)^n c)\frac{N!}{n!}=-\sum_{k\geq 0}(a+(-1)^{N+1+k}c)\frac{N!}{(N+1+k)!}\,. \tag{3}$$

<u>**Step 1**「式 (3) の左辺は整数」を示す</u>

$bN!$ と $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(a+(-1)^n c)\frac{N!}{n!}$ はともに整数より従う．　□

<u>**Step 2**「式 (3) の右辺 $\to 0$ $(N\to\infty)$」を示す</u>

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\geq 0}\frac{N!}{(N+1+k)!}\\
=&\frac{1}{N+1}+\frac{1}{(N+1)(N+2)}+\frac{1}{(N+1)(N+2)(N+3)}\\
&+\frac{1}{(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)}+\cdots\\
\leq&\frac{1}{N+1}+\frac{1}{(N+1)(N+2)}+\frac{1}{(N+2)(N+3)}+\cdots\\
=&\frac{1}{N+1}+\lim_{K\to\infty}\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{1}{N+k}-\frac{1}{N+k+1}\right)\\
=&\frac{1}{N+1}+\lim_{K\to\infty}\left(\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+K+1}\right)\to 0\ \ (N\to\infty).
\end{aligned}$$
□

以下，$N$ は十分大きいとする．

<u>**Step 3**「式 (3) の右辺は 0 に等しい」を示す</u>

(3) の左辺は整数で，右辺が 0 に近づくことより従う．　□

$$\sum_{k\geq 0}(a+(-1)^{N+1+k}c)\frac{N!}{(N+1+k)!}=A_N+B_N+C_N,$$

$$A_N=(a-(-1)^N c)\frac{1}{N+1}$$

$$B_N=(a+(-1)^N c)\frac{1}{(N+1)(N+2)}$$

$$C_N=\sum_{k\geq 2}(a+(-1)^{N+1+k}c)\frac{N!}{(N+1+k)!}$$

と置く．

<u>**Step 4**「$A_N=B_N=C_N=0$」を示す</u>

Step 3 は「$A_N+B_N+C_N=0$」を示している．$N\to\infty$ のとき $A_N\to 0$ は明らかであるが，加えて

$$(N+1)B_N=(a+(-1)^N c)\frac{1}{N+2}\to 0$$

$$(N+1)(N+2)C_N=\sum_{k\geq 2}(a+(-1)^{N+1+k}c)\frac{(N+2)!}{(N+1+k)!}\to 0 \quad \text{(Step 2 と同様の議論による)}$$

が得られる．ここで，$A_N+B_N+C_N=0$ の両辺に対し $(N+1)(N+2)$ を乗じると

$$(N+1)(N+2)A_N+(N+1)(N+2)B_N+(N+1)(N+2)C_N=0$$

であるが，今 $(N+1)(N+2)A_N,(N+1)(N+2)B_N$ は整数であるので $(N+1)(N+2)C_N$ もまた整数であることが従う．ここで $(N+1)(N+2)C_N$ は $N\to\infty$ で 0 に近づくので $(N+1)(N+2)C_N=0$ となり，$C_N=0$ を得る．このとき $A_N+B_N=0$ となる．再び $A_N+B_N=0$ の両辺に $N+1$ をかけて

$$(N+1)A_N+(N+1)B_N=0\,.$$

$(N+1)A_N$ は整数であるので $(N+1)B_N$ もまた整数である．$(N+1)B_N$ は $N\to\infty$ で 0 に近づくので $(N+1)B_N=0$ となり，$B_N=0$ を得る．$\therefore A_N=0$ を得る．以上から，十分大きな $N$ に対し，3 項 $A_N,B_N,C_N$ の各々が 0 になることが分かり，$a-(-1)^N c=0, a+(-1)^N c=0$ となる．$\therefore a=c=0$，従って $b=0$ となり矛盾．　□

## References


[1] M. Waldschmidt, *Introduction to Diophantine methods; irrationality and transcendence*, preprint.

[2] J. Liouville, *Sur l'irrationalité du nombre e = 2,718...*, J. Math. Pures Appl., (1) **5**, (1840), 192.

[3] A. N. Parshin, I. R. Shafarevich, *Number Theory IV*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **44**, Springer, 1998.