B-19

D.M.によるねじれ応答制御に関する研究

D.M.を含めた固有値問題の方程式

Research of twist response control by D.M.

The equation of the eigenvalue problem by D.M.

古橋剛 [1]，〇周翔宇 [2]，西村漢 [3]
Takeshi Furuhashi[1], *Xiangyu Zhou [2],Kan Nishimura[3]

Abstract: The research of the past showed the general form of the eigen vector by eigenvalue analysis of eccentric building. Therefore, this research considers the condition to decouple translational modes and torsional modes by equation of motion with using D.M.

1.はじめに

剛心と重心が一致しない偏心構造物は,地震動入力時に偏心によるねじれ振動が生じ,ねじれを考慮しない場合に比べて変位が増大する可能性がある.

既往の研究[4]では,偏心建物の固有値解析により得られた固有ベクトルに着目し,固有ベクトルの一般形を示した.しかし,D.M.がある場合の運動方程式については,検討はされていない.本報では, D.M.を利用した運動方程式を用いて,ねじれのモードと,並進のモードを非連成化することより,モード制御する条件を検討する.

2.研究方法

1 層 3 自由度の運動方程式は以下の 2 つの式がある.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{m} & & \\ & \boldsymbol{m} & \\ & & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}} \\ \ddot{\boldsymbol{y}} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} \boldsymbol{k_x} & & \boldsymbol{k_x e_y} \\ & \boldsymbol{k_y} & -\boldsymbol{k_y e_x} \\ \boldsymbol{k_x e_y} & -\boldsymbol{k_y e_x} & \boldsymbol{k_\theta} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \theta \end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix} \boldsymbol{m} & & \\ & \boldsymbol{m} & \\ & & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}}_0 \\ \ddot{\boldsymbol{y}}_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{(2-1)}^{[1]}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{m} & & \\ & \boldsymbol{m} & \\ & & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}} \\ \ddot{\boldsymbol{y}} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} \boldsymbol{k_x} & & \boldsymbol{k_x e_y} \\ & \boldsymbol{k_y} & -\boldsymbol{k_y e_x} \\ \boldsymbol{k_x e_y} & -\boldsymbol{k_y e_x} & \boldsymbol{k_\theta}+\boldsymbol{k_x e_y^2}+\boldsymbol{k_y e_x^2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \theta \end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix} \boldsymbol{m} & & \\ & \boldsymbol{m} & \\ & & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}}_0 \\ \ddot{\boldsymbol{y}}_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{(2-2)}$$

この 2 つの式はk_θの取り方が異なっている.式(2-1)にあるk_θは重心まわりのねじれ剛性であり, 一方, 式(2-2) にある k_θ は剛心まわりのねじれ剛性である. 2 つの式の関係について, 固有ベクトルの一般形を求め, 比較する.

2-1. 式(2-1)と式(2-2)の一般形

式(2-1)を $i=\sqrt{\frac{I}{m}}$, $\bar{e}_x = e_x / i$,　$\bar{e}_y = e_y / i$,　$z = i\,\theta$ と置いて変形すると, 固有値問題の方程式は式(2-1-1)となる.

$$\lambda^2\begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \omega_x^2 & 0 & \omega_x^2\bar{e}_y \\ 0 & \omega_y^2 & -\omega_y^2\bar{e}_x \\ \omega_x^2\bar{e}_y & -\omega_y^2\bar{e}_x & \omega_\theta^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix} \quad \text{(2-1-1)}$$

固有値問題の方程式を解き,固有ベクトルの一般形を以下のように示す[4].

$$\begin{array}{lll}
\text{モード 1} & : \lambda^2 = \omega_x^2 + b\,\omega_x^2\bar{e}_y & r_1^T = \{1 \quad a \quad b\} \\
\text{モード 2} & : \lambda^2 = \omega_y^2 - c\,\omega_y^2\bar{e}_x & r_2^T = \{-(a+bc) \quad 1 \quad c\} \\
\text{モード 3} & : \lambda^2 = \dfrac{ac-b}{a^2+abc+1}\omega_x^2\bar{e}_y + \dfrac{ab+b^2c+c}{a^2+abc+1}\omega_y^2\bar{e}_x + \omega_\theta^2 & \\
 & \multicolumn{2}{l}{r_3^T = \left\{\dfrac{ac-b}{a^2+abc+1} \quad -\dfrac{ab+b^2c+c}{a^2+abc+1} \quad 1\right\}}
\end{array}$$

既往の研究と同様の解き方で, 式(2-2)の一般形は以下のように示す.

$$\begin{array}{lll}
\text{モード 1} & : \lambda^2 = \omega_x^2 + b\,\omega_x^2\bar{e}_y & r_1^T = \{1 \quad a \quad b\} \\
\text{モード 2} & : \lambda^2 = \omega_y^2 - c\,\omega_y^2\bar{e}_x & r_2^T = \{-(a+bc) \quad 1 \quad c\} \\
\text{モード 3} & : \lambda^2 = \dfrac{ac-b}{a^2+abc+1}\omega_x^2\bar{e}_y + \dfrac{ab+b^2c+c}{a^2+abc+1}\omega_y^2\bar{e}_x + \omega_\theta^2 + \omega_x^2\bar{e}_y^2 + \omega_y^2\bar{e}_x^2 & \\
 & \multicolumn{2}{l}{r_3^T = \left\{\dfrac{ac-b}{a^2+abc+1} \quad -\dfrac{ab+b^2c+c}{a^2+abc+1} \quad 1\right\}}
\end{array}$$

比較すると, モード 1 とモード 2 には, 式(2-1)と式(2-2)で同じ結果が出ている, モード 3 のみ異なっている. これは, 2 つの式にある k_θ のとり方が異なるためであり, 式(2-1)の固有ベクトルの一般形に対する知見は式(2-2)にも当てはまることが分かった.

2-2. D.M.がある場合の固有値問題の方程式

次に, 式(2-2)を用いて, D.M.がある場合の運動方程式について検討する. この時, 式は以下のように示す.

$$\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{m} & & \\ & \boldsymbol{m} & \\ & & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \boldsymbol{m_{Dx}} & & \boldsymbol{m_{Dx}e_{Dy}} \\ & \boldsymbol{m_{Dy}} & -\boldsymbol{m_{Dy}e_{Dx}} \\ \boldsymbol{m_{Dx}e_{Dy}} & -\boldsymbol{m_{Dy}e_{Dx}} & \boldsymbol{I_D}+\boldsymbol{m_{Dx}e_{Dy}^2}+\boldsymbol{m_{Dy}e_{Dx}^2} \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}} \\ \ddot{\boldsymbol{y}} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} \boldsymbol{k_x} & & \boldsymbol{k_x e_y} \\ & \boldsymbol{k_y} & -\boldsymbol{k_y e_x} \\ \boldsymbol{k_x e_y} & -\boldsymbol{k_y e_x} & \boldsymbol{k_\theta}+\boldsymbol{k_x e_y^2}+\boldsymbol{k_y e_x^2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \theta \end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix} \boldsymbol{m} & & \\ & \boldsymbol{m} & \\ & & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}} \\ \ddot{\boldsymbol{y}} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{(2-2-1)}$$

式(2-2-1)から,固有値問題[2][3]の方程式(2-2-2)が得られる.これを変形すると,式(2-2-3)が得られる.

$$\omega^2\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{m} & & \\ & \boldsymbol{m} & \\ & & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \boldsymbol{m_{Dx}} & & \boldsymbol{m_{Dx}e_{Dy}} \\ & \boldsymbol{m_{Dy}} & -\boldsymbol{m_{Dy}e_{Dx}} \\ \boldsymbol{m_{Dx}e_{Dy}} & -\boldsymbol{m_{Dy}e_{Dx}} & \boldsymbol{I_D}+\boldsymbol{m_{Dx}e_{Dy}^2}+\boldsymbol{m_{Dy}e_{Dx}^2} \end{bmatrix}\right)\boldsymbol{r}$$
$$=\begin{bmatrix} \boldsymbol{k_x} & & \boldsymbol{k_x e_y} \\ & \boldsymbol{k_y} & -\boldsymbol{k_y e_x} \\ \boldsymbol{k_x e_y} & -\boldsymbol{k_y e_x} & \boldsymbol{k_\theta}+\boldsymbol{k_x e_y^2}+\boldsymbol{k_y e_x^2} \end{bmatrix}\boldsymbol{r} \quad \text{(2-2-2)}$$

$$\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{k_x} & & \boldsymbol{k_x e_y} \\ & \boldsymbol{k_y} & -\boldsymbol{k_y e_x} \\ \boldsymbol{k_x e_y} & -\boldsymbol{k_y e_x} & \boldsymbol{k_\theta}+\boldsymbol{k_x e_y^2}+\boldsymbol{k_y e_x^2} \end{bmatrix}- \omega^2\begin{bmatrix} \boldsymbol{m}+\boldsymbol{m_{Dx}} & & \boldsymbol{m_{Dx}e_{Dy}} \\ & \boldsymbol{m}+\boldsymbol{m_{Dy}} & -\boldsymbol{m_{Dy}e_{Dx}} \\ \boldsymbol{m_{Dx}e_{Dy}} & -\boldsymbol{m_{Dy}e_{Dx}} & \boldsymbol{I}+\boldsymbol{I_D}+\boldsymbol{m_{Dx}e_{Dy}^2}+\boldsymbol{m_{Dy}e_{Dx}^2} \end{bmatrix}\right)\boldsymbol{r}=0 \quad \text{(2-2-3)}$$

これに対して, ねじれのモードと,並進のモードを非連成化することにより,モード制御させる条件として,式(2-2-4)の固有ベクトルを有すると仮定する.

1:日大理工・教員・建築　2:日大理工・院（前）・建築　3:元日大理工・院（前）・建築

$$\boldsymbol{r}=\begin{Bmatrix} \boldsymbol{r}_x \\ \boldsymbol{r}_y \\ \boldsymbol{r}_\theta \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix},\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix},\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{2-2-4}$$

式(2-2-4)を式(2-2-3)に代入すると

$$\boxed{\begin{aligned} &\boldsymbol{k}_x=\omega^2(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{m}_{Dx}) \\ &\boldsymbol{k}_y=\omega^2(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{m}_{Dy}) \\ &\boldsymbol{k}_x\boldsymbol{e}_y=\omega^2\boldsymbol{m}_{Dx}\boldsymbol{e}_{Dy} \\ &\boldsymbol{k}_y\boldsymbol{e}_x=\omega^2\boldsymbol{m}_{Dy}\boldsymbol{e}_{Dx} \\ &\boldsymbol{k}_\theta+\boldsymbol{k}_x\boldsymbol{e}_y^2+\boldsymbol{k}_y\boldsymbol{e}_x^2=\omega^2\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{I}_D+\boldsymbol{m}_{Dx}\boldsymbol{e}_{Dy}^2+\boldsymbol{m}_{Dy}\boldsymbol{e}_{Dx}^2\right) \end{aligned}} \tag{2-2-5}$$

5 つの式に対し, $\omega^2,\boldsymbol{m}_{Dx},\boldsymbol{m}_{Dy},\boldsymbol{e}_{Dx},\boldsymbol{e}_{Dy},\boldsymbol{I}_D$ の 6 つの未知数があるため,解くことができない. $\boldsymbol{m}_{Dx}$ を既知とすると,未知数は $\boldsymbol{m}_{Dx}$ と関わる式(2-2-6)に変換できる.

$$\boxed{\begin{aligned} &\omega^2=\frac{\boldsymbol{k}_x}{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{m}_{Dx}} \\ &\boldsymbol{m}_{Dy}=\frac{\boldsymbol{k}_y(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{m}_{Dx})}{\boldsymbol{k}_x}-\boldsymbol{m} \\ &\boldsymbol{e}_{Dx}=\frac{\boldsymbol{k}_y\boldsymbol{e}_x(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{m}_{Dx})}{\boldsymbol{k}_y(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{m}_{Dx})-\boldsymbol{m}\boldsymbol{k}_x} \\ &\boldsymbol{e}_{Dy}=\frac{\boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{m}_{Dx})}{\boldsymbol{m}_{Dx}} \\ &\boldsymbol{I}_D=\frac{(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{m}_{Dx})(\boldsymbol{k}_\theta+\boldsymbol{k}_x\boldsymbol{e}_y^2+\boldsymbol{k}_y\boldsymbol{e}_x^2)}{\boldsymbol{k}_x}-\boldsymbol{I} \\ &-\left(\frac{\boldsymbol{k}_y(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{m}_{Dx})}{\boldsymbol{k}_x}-\boldsymbol{m}\right)\left(\frac{\boldsymbol{k}_y\boldsymbol{e}_x(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{m}_{Dx})}{\boldsymbol{k}_y(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{m}_{Dx})-\boldsymbol{m}\boldsymbol{k}_x}\right)^2 \\ &-\boldsymbol{m}_{Dx}\left(\frac{\boldsymbol{k}_x\boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{m}_{Dx})}{\boldsymbol{k}_x\boldsymbol{m}_{Dx}}\right)^2 \end{aligned}} \tag{2-2-6}$$

$\boldsymbol{m}_{Dx}$ を具体的な数値を指定しないと , $\omega^2,\boldsymbol{m}_{Dy},\boldsymbol{e}_{Dx},\boldsymbol{e}_{Dy},\boldsymbol{I}_D$ も $\boldsymbol{m}_{Dx}$ は無数の解がある.これに対して，Mdx=50[ton]を代入し,検討を行う.

2-3.数値代入と解析結果

1 層 3 自由度モデルの平面を Figure（2-3-1)に,モデルの諸元を Table (2-3-1)に示し,Mdx=50[ton]を代入すると Table (2-3-2)のように示す.

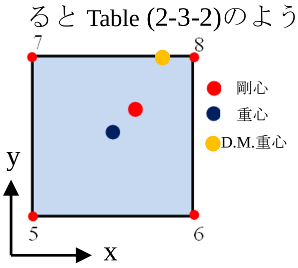

Figure 2-3-1. model plane

Table2-3-1. Elements of the examination model

	方向	単位	値
質量	−	[ton]	100
剛性	x 方向	[kN/m]	2000
	y 方向	[kN/m]	2400
偏心距離	x 方向	[m]	1
	y 方向	[m]	1

Table2-3-2. Elements of Mdx=50[ton]

D.M.質量	x 方向	[ton]	50
	y 方向	[ton]	80
D.M.偏心距離	x 方向	[m]	2.25
	y 方向	[m]	3
ID	―	[t・m^2]	24.98

さらに, 時刻歴応答解析を行う. 入力地震動は EICENTRO 1940NS, 入力方向は x 軸をもとに-90 度から 90 度までを 5 度刻ずつで入力している.

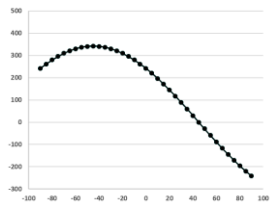

Figure 2-3-2. x direction

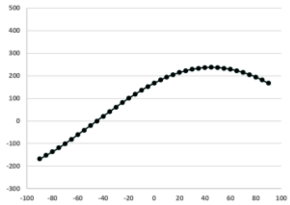

Figure 2-3-3. y direction

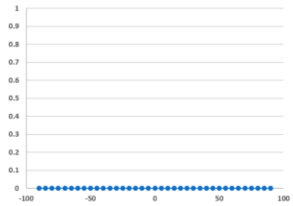

Figure 2-3-4. angle of rotation

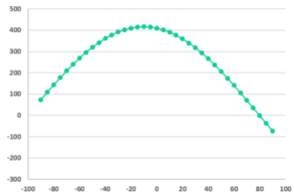

Figure 2-3-5. vectorial sum

六つの未知数を固有値問題方程式に代入し, 結果は Table (2-3-3)になる.

Table (2-3-3) Result of eigenvalue analysis

モード番号		1	2	3
固有値		13.3	13.3	13.3
固有周期		1.72	1.72	1.72
固有ベクトル	rx	0.96	0.00	0.96
	ry	0.20	1.00	-0.20
	rz	0.20	0.00	-0.20

3.まとめ

3-1.結果考察

時刻歴応答解析の結果より,D.M.を利用した運動方程式を用いて,ねじれのモードと,並進のモードを非連成化することができた.

しかし,固有値解析からみると,固有値が三重根のため,固有ベクトルを求まらない,任意ベクトルに対しても,固有値問題方程式が成立する.

3-2.今後の検討

固有値問題を解決し, モード解析からねじれモードと並進モード非連成化することを確かめる.
その後, 多層のモデルに拡張し, 検討する.

4.参考文献

[1] 柴田明徳：「最新耐震構造解析第 2 版」,森山出版,2003 年 5 月.

[2] 石丸辰治：「応答性能に基づく「対震設計」入門」, 彰国社,2004 年 3 月.

[3] 吉田正廣,小島紀男,松森徳衛,松浦武信,川上泉：「現代工学のためのマトリクスの固有値問題」現代工学社,2002 年 7 月.

[4] 増澤拓也：「並進とねじれの連成振動モードに関する基礎的研究」,日本建築学会梗概,2016 年 8 月.