

階段状水路における nonaerated skimming flow の水面形と乱流境界層の発達状態
 Water Surface Profile and Boundary Layer Development of Nonaerated Skimming Flow in a Stepped Channel

○佐藤柳言¹, 高橋正行¹

*Ryugen Satoh¹, Masayuki Takahashi¹

Abstract: For the hydraulic design of the stepped channels, it is important to clarify the depth of the nonaerated skimming flow, the velocity characteristics, the boundary layer thickness, and the position of the inception point. In this study, an analytical method for the water surface profile and the boundary layer development in the nonaerated skimming flow on a stepped channel is developed. The results of the analysis are validated by the present experiments.

1. まえがき

階段状水路は、急傾斜水路を流下する高速流を傾斜面上で減勢させる方法として利用されている [1],[2]。階段状水路に流入した流れが skimming flow (各ステップ隅角部で常に渦の形成が認められる流況) となる場合 [1], 乱流境界層が流下とともに発達し、やがて乱流境界層は水面に到達する。この断面は inception point (以下 I.P. と略す, Fig.1) と呼ばれ, I.P. より上流側では nonaerated skimming flow が形成され, I.P. より下流側では水面から空気が混入して aerated skimming flow となる。階段状水路の木工設計のために, nonaerated skimming flow と aerated skimming flow の両方の領域の水深, 流速, 比エネルギーの大きさを予測する必要がある。従来の研究 [1]-[3] によって, aerated skimming flow の擬似等流区間および不等流区間における空気混入流水深, 流速, 比エネルギーが明らかにされた。しかしながら, nonaerated skimming flow の水面形と乱流境界層厚を解析的に求める方法は示されていない。

本研究は, 階段状水路の nonaerated skimming flow を対象に, 階段状水路の局所摩擦抵抗係数を考慮して nonaerated skimming flow の水面形と乱流境界層の発達状態を解析的に検討し, 実験による検証を行ったものである。

2. 解析

2.1 水深と乱流境界層厚

乱流境界層外側の領域 ($\delta \leq y \leq d$; y は仮想底面を原点とする仮想底面に垂直上向きの座標, δ は乱流境界層厚, d は水深) のエネルギー損失は無視できる [4] ため, 断面① (Fig.1) と断面③ ($x = x$, Fig.1) との間の自由水面に沿った流線にベルヌーイの定理を適用すると,

$$1.5d_c + x \sin \theta = d \cos \theta + U^2 / (2g) \quad (1)$$

が得られる。ここに, $d_c = \sqrt[3]{q^2/g}$ は限界水深, g は重力加速度, q は単位幅流量, θ は水路傾斜角度, x は仮想底面に沿った流下方向の座標, U は断面③の乱流境界層外側の流速である。

階段状水路のエッジ断面 (Fig.1) における x 方向の時間平均流速 \bar{u} の分布は, 乱流境界層内 ($0 \leq y \leq \delta$) では,

$$\bar{u}/U = (y/\delta)^{1/N} \quad \text{for } 0 \leq y \leq \delta \quad (2)$$

で近似されるものとし, 乱流境界層外 ($\delta \leq y \leq d$) では,

$$\bar{u}/U = 1 \quad \text{for } \delta \leq y \leq d \quad (3)$$

となる。排除厚 $\delta_1 = \int_0^d \left(1 - \frac{\bar{u}}{U}\right) dy$ は (2) と (3) より,

$$\delta_1 = \delta / (N + 1) \quad (4)$$

となる。(2) と (3) より $q = \int_0^d \bar{u} dy = U(d - \delta_1)$ が示され,

$$U = q / (d - \delta_1) \quad (5)$$

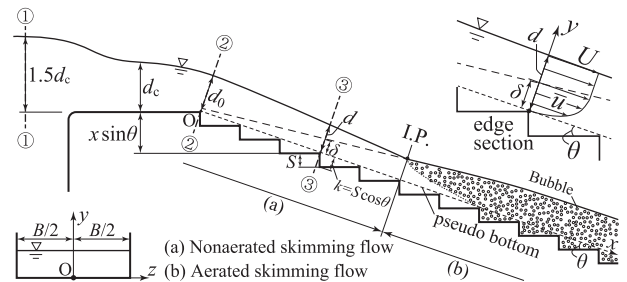


Figure 1. Definition sketch of a stepped channel

が得られる。(5) に (4) を用い, これを (1) に代入して x で微分すると, N は x によらず一定である [5] から,

$$\frac{dd}{dx} = \frac{\sin \theta \left(\frac{d}{d_c} - \frac{1}{N+1} \frac{\delta}{d_c} \right)^3 - \frac{1}{N+1} \frac{d\delta}{dx}}{\cos \theta \left(\frac{d}{d_c} - \frac{1}{N+1} \frac{\delta}{d_c} \right)^3 - 1} \quad (6)$$

が得られる。

二次元非圧縮性流体で定流の場合, 階段状水路の nonaerated skimming flow において仮想底面上の剪断応力 $\bar{\tau}_0$ を考慮することで乱流境界層の運動量方程式は,

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{2\delta_2 + \delta_1}{U} \frac{dU}{dx} = \frac{C_f}{2} \quad (7)$$

で示される [6]。ここに, δ_2 は運動量厚, C_f は局所摩擦抵抗係数であり, それぞれ,

$$\delta_2 = \int_0^d \frac{\bar{u}}{U} \left(1 - \frac{\bar{u}}{U}\right) dy, \quad (8)$$

$$C_f = \bar{\tau}_0 / \left(\frac{\rho U^2}{2} \right) \quad (9)$$

で定義される。ここに, ρ は密度である。(2) と (3) を (8) に用いると,

$$\delta_2 = N\delta / \{(N + 1)(N + 2)\} \quad (10)$$

となる。(1), (4), (7), (10) より,

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{(N + 1)(N + 2)}{2N} C_f - \left(1 + \frac{N + 2}{2N}\right) \cdot \frac{\delta}{x} \cdot \frac{\sin \theta - \frac{dd}{dx} \cos \theta}{\sin \theta + 1.5 \frac{d_c}{x} - \frac{d}{x} \cos \theta} \quad (11)$$

が得られる。

2.2 流速特性と抵抗則

乱流粗面傾斜水路における流速分布は,

$$\bar{u}/u_* = \Lambda(y/k)^{1/N} \quad (12)$$

1: 日大理工・教員・土木

によって示される^[7]. ここに, $u_* [= \sqrt{\tau_0/\rho}]$ は摩擦速度, Λ は係数, k は等値粗度高さである. 階段状水路の skimming flow の場合, 階段による凹凸を $k = S \cos \theta$ (S はステップ高) で代表させることとする. (12) に乱流境界層外縁 ($y = \delta$) で $\bar{u} = U$ の境界条件を用いて (9) を整理すると,

$$C_f = 2\Lambda^{-2} \{\delta / (S \cos \theta)\}^{-2/N} \quad (13)$$

が得られる. 階段状水路の nonaerated skimming flow における乱流境界層厚の実験式^[5]を用いると, (13) は,

$$C_f = \frac{2}{\Lambda^2} \left\{ 0.135 \frac{(1+N)}{N} \right\}^{-\frac{2}{N}} \left(\frac{x}{S \cos \theta} \right)^{-\frac{1.062}{N}} = a \left(\frac{x}{S \cos \theta} \right)^{-b} \quad (14)$$

で示される. ここに, a, b は係数である.

3. 実験

実験は, 広頂堰を有する $S = 1.5 \text{ cm}$, $\theta = 19^\circ$ の階段模型を水路幅 $B = 40.0 \text{ cm}$ の長方形断面水平水路に設置して行われた. $S/d_c = 0.2$ の nonaerated skimming flow における水路中央面 ($z = 0$) のエッジ断面を対象に, 水深 d はポイントゲージで測定され, 流速 \bar{u} はレーザー Doppler 流速計 (採取時間 120 s) とピトー管 (管径 3 mm, JIS-B8330) で測定された. 乱流境界層厚 δ は (4) と (10) から得られる

$$\delta = \{(H_{12} + 1)/(H_{12} - 1)\} \delta_1 \quad (15)$$

より算定されている. ここに, $H_{12} [= \delta_1/\delta_2]$ は形状係数である.

4. 結果

4.1 流速特性

与えられた θ , S/d_c , x/d_c に対する \bar{u}/U の分布の一例を Fig.2 に示す. Fig.2 に示されるように, 乱流境界層内 ($0 \leq y/\delta \leq 1$) では y/δ の増加とともに \bar{u}/U は大きくなり, 境界層外 ($y/\delta \geq 1$) では $\bar{u}/U = 1$ で一定となる. Fig.2 の実線は擬似等流空気混入流における N の実験式^[2]

$$N = 14\theta^{-0.65} \frac{S}{d_c} \left(\frac{100 S}{\theta d_c} - 1 \right) - 0.041\theta + 6.27 \quad (\theta \text{ in deg.}) \quad (16)$$

と (2) より求められる計算値であり, x/d_c によらず乱流境界層内の \bar{u}/U の実験値とよく一致している.

4.2 局所摩擦抵抗係数

与えられた θ と S/d_c に対して, 実測された d , δ , x , $d\delta/dx$, dd/dx と (16) の N を (11) に代入すると C_f の間接測定値が Fig.3 のように得られる. Fig.3 に示されるように, $x/(S \cos \theta)$ の増加とともに C_f の値は小さくなる. C_f の間接測定値を用いて (14) の a を最小二乗法で決めると,

$$C_f = 0.0299 \{x / (S \cos \theta)\}^{-1.062/N} \quad (17)$$

が得られる. (16) と (17) より求められる C_f の計算値は Fig.3 の実線で示され, C_f の間接測定値 (プロット) と計算値 (実線) はよく一致している.

4.3 水深と乱流境界層厚

開水路段落ち流れにおける自由越流の brink depth d_b は,

$$d_b/d_c = 0.715 \quad (18)$$

で示される^[8]. 断面②の水深 d_0/d_c は本実験によると $d_b/d_c \approx d_0/d_c$ であったため, d_0/d_c を (18) で与えることとする. また, 広頂堰上に形成される排除厚 δ_1 は,

$$\delta_1/L = 1.73(R_L)^{-0.5} \quad \text{for } R_L < 3 \times 10^5 \quad (19)$$

で示され^[9], 断面②においても (19) の δ_1 が形成されてい

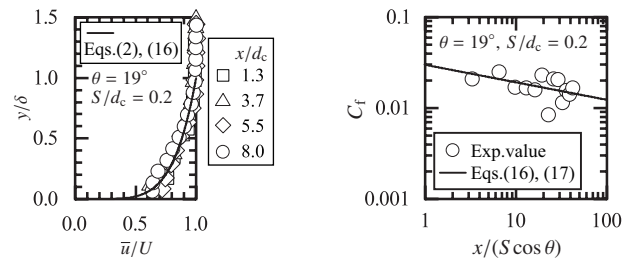


Figure 2. Velocity distributions Figure 3. Streamwise of the local skin friction coefficient

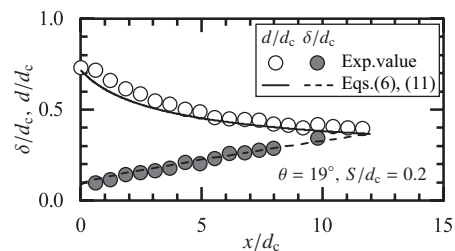


Figure 4. Water depth and boundary layer thickness

るものと考えられる. ここに, $R_L [= V_c L/\nu]$ はレイノルズ数, V_c は限界流速, L は堰頂長さ, ν は動粘性係数である. 断面②においても (16) が適用されるものと考え, (4), (16), (19) より断面②の乱流境界層厚 δ_0/d_c が算出される.

水深 d/d_c と乱流境界層厚 δ/d_c の流下方向変化を Fig.4 に示す. プロットは実験値であり, 実線および破線は (16) と (17) による C_f ; (18) と (19) による断面②の境界条件 ($d_0/d_c, \delta_0/d_c$); (16) の N の値を用いて, (6) と (11) より得られた水深 d/d_c および乱流境界層厚 δ/d_c の計算値である. 与えられた θ と S/d_c に対して Fig.4 に示されるように, x/d_c の増加とともに d/d_c の値は小さくなり, δ/d_c の値は大きくなる. また, d/d_c および δ/d_c の実験値と計算値はそれぞれ 11% と 17% 以内の誤差率で一致している.

5. まとめ

階段状水路の nonaerated skimming flow の局所摩擦抵抗係数を (14) で評価して (6) と (11) を用いることで, 与えられた θ と S/d_c に対する nonaerated skimming flow の水深と乱流境界層厚を解析的に算出することが可能となった.

参考文献

- [1] Ohtsu, I., Yasuda, Y., and Takahashi, M.: Flow characteristics of skimming flows in stepped channels, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.130, No.9, pp.860–869, 2004.
- [2] Takahashi, M. and Ohtsu, I.: Aerated flow characteristics of skimming flow over stepped chutes, *Journal of Hydraulic Research*, Vol.50, No.4, pp.427–434, 2012.
- [3] 高橋正行, 竜沢宗一郎, 大津岩夫: 階段状水路の skimming flow における空気混入不等流の水理特性, 土木学会論文集 B1(水工学), Vol.73, No.4, pp.I_721–I_726, 2017.
- [4] Iwasa, Y.: Boundary layer growth of open channel flows on a smooth bed and its contribution to practical application to channel design, *Memoirs, Faculty of Eng., Kyoto Univ.*, Vol.19, No.3, pp.229–254, 1957.
- [5] 山元雄生, 高橋正行, 大津岩夫: 階段状水路における non-aerated skimming flow の特性, 土木学会論文集 B1(水工学), Vol.72, No.4, pp.I_589–I_594, 2016.
- [6] 佐藤柳言, 高橋正行, 大津岩夫: 階段状水路における non-aerated skimming flow の解析的検討, 土木学会論文集 B1(水工学), Vol.75, No.2, 2019. (印刷中)
- [7] Castro-Orgaz, O.: Hydraulics of developing chute flow, *Journal of Hydraulic Research*, Vol.47, No.2, pp.185–194, 2009.
- [8] Rouse, H.: Discharge characteristics of the free overfall, *Civil Engineering*, Vol.6, No.4, pp.257–260, 1936.
- [9] Ippen, A. T.: *Engineering Hydraulics*, pp. 525–528, chapter 8, John Wiley & Sons, 1949.