O-10

高階微分項を含む重力理論におけるブラックホール熱力学第一法則

The first law of black hole mechanics in gravitational theories with higher derivative terms

○油山翔太[1]，　三輪光嗣[2]
*Shota Aburayama[1], Akitsugu Miwa[2]

Abstract : We review, based on [1][2], the first law of black hole mechanics which was proven to hold in diffeomorphism invariant theories with higher derivative terms. In an asymptotically flat spacetime with a bifurcate Killing horizon, variations of its energy and angular momentum satisfy an equation involving a certain integral over the bifurcation surface. The integral can be written as a product of Hawking temperature and a remaining factor. By regarding the equation as the first law of black hole mechanics, a formula for entropy of the black hole is derived.

1．導入

ホライズンを持つ時空は, 温度やエントロピー等の熱力学的性質を持つことが知られ, 時空が角運動量をもつ Kerr 解において，エネルギーの変化 $\delta\mathcal{E}$ とエントロピーの変化 δS, 角運動量の変化 $\delta\mathcal{J}$ は以下のような関係を満たす．

$$\delta\mathcal{E} = T\delta S + \Omega_H \delta\mathcal{J} \tag{1}$$

T は Hawking 温度と呼ばれるブラックホール (BH) の温度，Ω_H はホライズンの角速度を表す．(1) 式は BH の熱力学第一法則を示している．Einstein-Hilbert(EH) 作用に基づく重力理論では，BH のエントロピーはホライズンの面積に比例することが知られており，このことは重力の持つ自由度の取り方に関する示唆を与えている．

本講演では高階微分項が含まれる理論に適用でき，BH のエントロピーをネーターチャージに関連する量として定義する Wald の方法 [1][2] を紹介する．

2．シンプレクティック形式

n 次元時空の計量を g_{ab}, 物質場を ψ, 曲率テンソルを R_{bcde} とする．高階の微分項を含む微分同相写像の下で不変な n 形式ラグランジアンは以下で与えられる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}[g_{ab}, R_{bcde}, \nabla_{a_1}R_{bcde}, ..., \nabla_{(a_1...}\nabla_{a_m)}R_{bcde},\\ \psi, \nabla_{a_1}\psi, ...\nabla_{(a_1...}\nabla_{a_l)}\psi]\end{aligned} \tag{2}$$

$\boldsymbol{L} = L\boldsymbol{\epsilon}$ のようにスカラー L と n 次元不変体積要素 $\boldsymbol{\epsilon}$ で $\boldsymbol{L}$ を表している．積の微分による変形を繰り返し行うと，その変分は以下のように書ける．

$$\delta\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\epsilon}\left(A_g^{ab}\delta g_{ab} + E_R^{abcd}\delta R_{abcd} + E_\psi\delta\psi\right) + d\tilde{\boldsymbol{\Theta}} \tag{3}$$

δR_{abcd} の項は δg_{ab} と外微分項に書き直すことができ，場を $\phi = (g_{ab}, \psi)$ とまとめると以下のように変形される．

$$\delta\boldsymbol{L} = \boldsymbol{E}\delta\phi + d\boldsymbol{\Theta} \tag{4}$$

第一項は $\boldsymbol{E} = 0$ が理論の運動方程式を与え，第二項に現れる $\boldsymbol{\Theta}$ は $(n-1)$-形式シンプレクティックポテンシャルと呼ばれる．このとき $\boldsymbol{\Theta}$ は以下のように書ける．

$$\boldsymbol{\Theta} = 2\boldsymbol{E}^{bcd}\nabla_d\delta g_{bc} - 2\nabla_d\boldsymbol{E}^{bcd}\delta g_{bc} + \tilde{\boldsymbol{\Theta}} \tag{5}$$

ただし $(\boldsymbol{E}^{bcd})_{a_2\cdots a_n} = E_R^{abcd}\boldsymbol{\epsilon}_{aa_2\cdots a_n}$ である．また EH 作用 $L = \frac{1}{16\pi G}R$ のとき，(3) 式第二項は外微分となる．

ここで，$\boldsymbol{\Theta}$ の任意性について議論する．まず (4) 式より $\boldsymbol{\Theta}$ には任意の外微分項 $d\boldsymbol{Y}$ を加えることができる．また $\boldsymbol{L}$ は任意の表面項 $d\boldsymbol{\mu}$ を加えても理論が変わらない．したがって以下のような $(n-2)$-形式 $\boldsymbol{Y}$ と $(n-1)$-形式 $\boldsymbol{\mu}$ の不定性が存在する．

$$\boldsymbol{\Theta} \to \boldsymbol{\Theta} + d\boldsymbol{Y} + \delta\boldsymbol{\mu} \tag{6}$$

ξ を n 次元時空上で滑らかなベクトル場とし，$(n-1)$-形式シンプレクティックカレントを以下のように定義する．

$$\boldsymbol{\omega}(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi, \delta\phi) = \delta\boldsymbol{\Theta}(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) - \mathcal{L}_\xi\boldsymbol{\Theta}(\phi, \delta\phi) \tag{7}$$

質点系の解析力学との対応を見るために, 場 ϕ に正準変数 $(q(t), p(t))$ を対応させ，$\boldsymbol{\Theta}(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) \to p\dot{q}$，$\boldsymbol{\Theta}(\phi, \delta\phi) \to p\delta q$ のように置き換える．また正準方程式 $\dot{q} = \partial_p H$, $\dot{p} = -\partial_q H$ を用いると，(7) 式は δH を与える．場の理論では時空のコーシー面 C 上で (7) 式を積分することで，以下のシンプレクティック形式を定義する．

$$\boldsymbol{\Omega}(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi, \delta\phi) = \int_C \boldsymbol{\omega}(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi, \delta\phi) \tag{8}$$

これは生成母関数の変分 $\delta H_\xi[\phi]$ に等しい．

3．ネーターカレント $\boldsymbol{J}$ と $(n-2)$-形式 $\boldsymbol{Q}$

微分同相写像の下で不変な理論における，$(n-1)$-形式のネーターカレント $\boldsymbol{J}$ は以下のように与えられる．

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\Theta}(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) - \xi\cdot\boldsymbol{L} \tag{9}$$

ただし内部積 $\xi\cdot\boldsymbol{L}$ は ξ の添字と $\boldsymbol{L}$ の初めの添字が縮約された $(n-1)$-形式である．(4) 式を用いると $\boldsymbol{J}$ の外微分は以下のように書ける．

$$d\boldsymbol{J} = -\boldsymbol{E}\mathcal{L}_\xi\phi \tag{10}$$

場 ϕ が運動方程式 $(\boldsymbol{E} = 0)$ を満たすとき，$\boldsymbol{J}$ は閉形式となるため $\boldsymbol{J} = d\boldsymbol{Q}$ を満たすような $(n-2)$-形式の $\boldsymbol{Q}$ が存

[1] 日大理工・院 (前)・物理　[2] 日大・教員・物理

在する．一方，(5) 式を (9) 式に代入すると $\boldsymbol{J}$ は以下のように書ける．

$$\boldsymbol{J} = 2\boldsymbol{E}^{bcd}\nabla_d\mathcal{L}_\xi g_{bc} - 2\nabla_d\boldsymbol{E}^{bcd}\mathcal{L}_\xi g_{bc} + \tilde{\boldsymbol{\Theta}} - \xi\cdot\boldsymbol{L} \quad (11)$$

$\tilde{\boldsymbol{\Theta}}$ には $\nabla\xi$ より高い ξ の微分項は含まれないため，(11) 式の右辺には ξ の二階より高階の微分項は現れない．また $\boldsymbol{\Theta}$ の不定性 (6) 式を考慮すると，$(n-2)$-形式 $\boldsymbol{Q}$ は以下のように書ける．

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{W}_c\xi^c + \boldsymbol{X}^{cd}\nabla_{[c}\xi_{d]} + \boldsymbol{Y} + d\boldsymbol{Z} \quad (12)$$

ここで、$\boldsymbol{X}^{cd}$ は $(\boldsymbol{X}^{cd})_{c_3\ldots c_n} = -E_R^{abcd}\boldsymbol{\epsilon}_{abc_3\ldots c_n}$ であり，E_R^{abcd} は (3) 式の第二項に現れるものと同一のものである．(6) 式の $\delta\boldsymbol{\mu}$ の項は (12) 式第一項に吸収される．

４．保存量

シンプレクティック形式 (8) 式を用いてエネルギーや角運動量を示す．(9) 式において非定常な摂動を考える．

$$\delta\boldsymbol{J} = \delta\boldsymbol{\Theta}(\phi,\mathcal{L}_\xi\phi) - \mathcal{L}_\xi\boldsymbol{\Theta}(\phi,\delta\phi) + d(\xi\cdot\boldsymbol{\Theta}(\phi,\delta\phi)) \quad (13)$$

(13) 式において，(7) 式を用いると，以下のように書ける．

$$\boldsymbol{\omega}(\phi,\mathcal{L}_\xi\phi,\delta\phi) = \delta\boldsymbol{J} - d(\xi\cdot\boldsymbol{\Theta}) \quad (14)$$

ここで時空はコーシー面 C を持ち，漸近的平坦な場合を考える．(14) 式の両辺を C 上で積分し，$\delta H_\xi = \boldsymbol{\Omega}$ を考慮すると $\delta H_\xi = \delta\int_C \boldsymbol{J} - \int_\infty \xi\cdot\boldsymbol{\Theta}$ のように書ける．ここで ∞ は無限遠の $(n-2)$ 次元球面である．$\int_\infty \xi\cdot\boldsymbol{\Theta} = \delta\int_\infty \xi\cdot\boldsymbol{B}$ という $(n-1)$-形式 $\boldsymbol{B}$ が存在するとき生成母関数 H_ξ は以下のように書ける．

$$H_\xi = \int_\infty (\boldsymbol{Q}[\xi] - \xi\cdot\boldsymbol{B}) \quad (15)$$

(15) 式は ξ が時間並進の場合エネルギーを与え，ξ が空間回転の場合角運動量を与える．

ここで EH 作用の例を挙げる．ξ を時間並進 t にとると以下のように書ける．

$$\mathcal{E} = \int_\infty (\boldsymbol{Q}[t] - t\cdot\boldsymbol{B}) = \frac{1}{16\pi}\int_\infty dSr^i(\partial^j h_{ij} - h^{kl}\partial_i h_{kl}) \quad (16)$$

添え字 i,j,k,l は $(n-1)$ 次元であり，これは漸近的平坦な時空のエネルギーを表す ADM 質量 [3][4] である．また ξ を空間回転 φ にとると，$\varphi\cdot\boldsymbol{\Theta}$ は無限遠方の球面で消える．

$$\mathcal{J} = -\int_\infty \boldsymbol{Q}[\varphi] = -\frac{1}{16\pi}\int_\infty dS_{\mu\nu}\nabla^\mu\varphi^\nu \quad (17)$$

これは角運動量の Komar 積分 [3][4] と一致する．

５．BH 熱力学第一法則

ξ が場の対称性の方向である場合，つまり $\mathcal{L}_\xi\phi = 0$ の場合，(14) 式の左辺は $\mathcal{L}_\xi\phi$ に関して線形であるから消える．また ϕ は運動方程式の解であるから，$\delta\boldsymbol{J} = \delta d\boldsymbol{Q} = d\delta\boldsymbol{Q}$ より (14) 式右辺を超曲面 Ξ 上で積分すると，以下の式が得られる．

$$\int_{\partial\Xi}(\delta\boldsymbol{Q}[\xi] - \xi\cdot\boldsymbol{\Theta}) = 0 \quad (18)$$

時空が漸近的平坦かつ分岐キリングホライズンを持つ場合を考える．ホライズン上でヌルとなり，分岐面 Σ 上で $\xi = 0$ となるキリングベクトルを $\xi = t + \Omega_H\varphi$ のように定義すると，Σ 上で $\nabla_{[c}\xi_{d]} = \kappa\epsilon_{cd}$ が成り立つ [2][4]．ただし $l^\mu\xi_\mu = -\kappa$ を満たすヌルベクトル l を用いて $\epsilon_{cd} = \frac{2}{\kappa}\xi_{[c}l_{d]}$ である．また Ω_H はホライズンの角速度であり，κ は表面重力である．このとき (18) 式に含まれる無限遠方での積分は (16) 式と (17) 式により $\mathcal{E}$ や $\mathcal{J}$ になる．また分岐面 Σ からの寄与も受け，(18) 式は以下のように書ける．

$$\delta\int_\Sigma \boldsymbol{Q}[\xi] = \delta\mathcal{E} - \Omega_H\delta\mathcal{J} \quad (19)$$

(12) 式第一項は分岐面 Σ 上で $\xi = 0$ となるため，$\boldsymbol{Q},\delta\boldsymbol{Q}$ のどちらにも寄与しない．第四項は分岐面 Σ が境界をもたないため寄与しない．第三項は $\boldsymbol{Y}$ が $\mathcal{L}_\xi\phi$ に線形であるため，$\boldsymbol{Q}$ に寄与しない．また $\delta\boldsymbol{Y}(\phi,\mathcal{L}_\xi\phi) = \mathcal{L}_\xi\boldsymbol{Y}(\phi,\delta\phi) = \xi\cdot d\boldsymbol{Y} + d(\xi\cdot\boldsymbol{Y})$ より，$\delta\boldsymbol{Y}$ は第一項と第四項と同じ形になるため $\delta\boldsymbol{Q}$ に寄与しない．したがって (19) 式の左辺は以下のように書ける．

$$\delta\int_\Sigma \boldsymbol{Q}[\xi] = \delta\int_\Sigma \boldsymbol{X}^{cd}\nabla_{[c}\xi_{d]} \quad (20)$$

$w_{cd} = \nabla_{[c}\xi_{d]} - \kappa\epsilon_{cd}$ とおくと定常な背景の下では $w_{cd} = 0$ だが, 一般には $\delta w_{cd} \neq 0$ である．

$$\delta\int_\Sigma \boldsymbol{Q}[\xi] = \kappa\int_\Sigma \boldsymbol{X}^{cd}\epsilon_{cd} + \int_\Sigma \boldsymbol{X}^{cd}\delta w_{cd} \quad (21)$$

Σ の法線方向の反転の下での振る舞いを調べることで，右辺第二項は 0 であることがわかる．そこで $S = 2\pi\int_\Sigma \boldsymbol{X}^{cd}\epsilon_{cd}$ と定義すると (19) 式は以下のように書ける．

$$\frac{\kappa}{2\pi}\delta S = \delta\mathcal{E} - \Omega_H\delta\mathcal{J} \quad (22)$$

(22) 式右辺第一項は時空のエネルギーの変化，第二項は角運動量変化に伴うエネルギーの変化を表す．左辺を熱の出入りと解釈し $\frac{\kappa}{2\pi}$ は Hawking 温度であるから，熱力学第一法則と比較すると S はエントロピーと考えられる．

６．まとめ

論文 [1][2] に沿って，高階微分項を含む理論に適用でき，BH のエントロピーをネーターチャージに関連する量として定義する Wald の方法に関するレビューを行った．特に，この方法では，エネルギーや角運動量などの保存量をネーターカレントやシンプレクティック形式に基づいて無限遠方での積分によって定義することを説明した．また，これらの保存量と分岐面上の積分量の間に成り立つ関係式を熱力学第一法則と比較することで BH のエントロピーに対する表式が得られることを説明した．

参考文献

[1] R. M. Wald, Phys. Rev. D **48**, no. 8, R3427 (1993).
[2] V. Iyer and R. M. Wald, Phys. Rev. D **50**, 846 (1994).
[3] P. K. Townsend, arXiv:gr-qc/9707012 (1997).
[4] 福間将文 酒谷雄峰,「重力とエントロピー」 サイエンス社 (2014).