O-11

ホログラフィック原理のインフレーションへの適用
Applying the holographic principle to inflation

○保田有佑[1]，　三輪光嗣[2]
*Yusuke Yasuda[1], Akitugu Miwa[2]

Abstract : Applying the holographic principle to entropy of a region results in an upper bound, i.e. an IR cutoff, for the size L of the region. Even more restrictive bound for L results from the requirement that the energy of the region should not exceed the mass of the black hole of the same size, and energy densities satisfying such a requirement are related to the IR cutoff. In this talk, we review an application of such an idea to the dark energy of the present univserse and then we also review a more recent study on its application to the inflationary model of the early universe.

1．導入

宇宙は高温高密度の初期状態で始まり，それが大きく膨張することで現在の宇宙ができたと考えられている．この考えはビッグバン理論と呼ばれ，宇宙マイクロ波背景放射の予言などいくつかの成功を収めてきた．しかし宇宙が平坦すぎるという “平坦性問題” や，宇宙が均一すぎるという “ホライズン問題” など，ビッグバン理論だけでは説明できない問題がいくつかある．この問題を解決するために導入された理論が，初期の宇宙が加速膨張したと仮定するインフレーション理論である．ここではスローロール・インフレーションと呼ばれるモデルに対し，ホログラフィック原理のアイデアを適用させた [1] を周辺事項も含めてレビューする [2][3]．以下では $a(t)$ をスケール因子，K を空間曲率とし，計量は FRW 計量

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\Omega^2\right) \tag{1}$$

を用いる．ホログラフィック原理は，局所場の理論に IR カットオフの存在を示唆する．[1] では IR カットオフの役割を果たしうる典型的な長さとして，次式で定義される，ハッブル・ホライズン半径 D，粒子ホライズン半径 L_p，未来のイベント・ホライズン半径 L_f が議論されている．

$$D = \frac{1}{H} = \frac{1}{\frac{a(t)}{\dot{a}(t)}} \tag{2}$$

$$L_p = a(t)\int_0^t \frac{dt}{a(t)} \tag{3}$$

$$L_f = a(t)\int_t^\infty \frac{dt}{a(t)} \tag{4}$$

H はハッブル・パラメータで膨張率を表し，$\dot{a}(t) = \frac{da(t)}{dt}$ である．D は宇宙の後退速度が光速になる距離，L_p は過去において影響を及ぼし得た最大の距離，L_f は未来において影響を及ぼし得る最大の距離である．

2．スローロール・インフレーション

以下ではスローロール・インフレーションと呼ばれるインフレーションのモデルを考える．このモデルは，インフレーションを起こすスカラー場であるインフラトン場 ϕ の値が非常にゆっくりと変化するモデルである．ここでスローロール・パラメータ ϵ_n を次式で定義する [4]．

$$\epsilon_{n+1} = \frac{d\ln|\epsilon_n|}{d\ln a(t)}, \quad \epsilon_0 = \frac{1}{H} \tag{5}$$

スローロール・インフレーションでは，スローロール・パラメータが十分小さい間インフレーションが続く．重力場とインフラトン場の複合系におけるスカラー成分とテンソル成分それぞれの初期ゆらぎのパワースペクトルの比を r，スカラー成分の初期揺らぎのパワースペクトルに対する波数の指数依存性を $n_s - 1$ とすると，それぞれスローロール・パラメータで次のように表すことができる．

$$r \sim 16\epsilon_1 \qquad n_s \sim 1 - 2\epsilon_1 - 2\epsilon_2 \tag{6}$$

3．ホログラフィック原理に基づいた IR カットオフと UV カットオフの関係

運動量（またはエネルギー）に対し，UV カットオフ Λ_{UV} を持つ局所場の理論において，典型的な長さ L で特徴づけられた領域を考える．局所場の理論でエントロピー S は，その領域を長さ $\frac{1}{\Lambda_{UV}}$ の格子からなると考えた場合の自由度 $L^3\Lambda_{UV}^3$ で与えられる．一方，Bekenstein によると，ある領域のもつエントロピーの最大値は，その領域の表面積の $M_p^2/4$ 倍で与えられる．ここで M_p はプランクスケールである．このような考え方はホログラフィック原理と呼ばれ，式で表すと次のようになる．

$$L^3\Lambda_{UV}^3 \le L^2 M_p^2 \tag{7}$$

このため，L には Λ_{UV} に依存する最大値が存在し，IR カットオフとして働くことが期待される．また，領域内の零点エネルギーの総和がブラックホールの質量を超えないための以下の関係式は，(7) 式より強い制限を与える．

$$L^3\Lambda_{UV}^4 \le L M_p^2 \tag{8}$$

[1] 日大理工・院 (前)・物理　[2] 日大・教員・物理

(7) 式から導かれる IR カットオフは $\left(\frac{M_p}{\Lambda_{UV}}\right)^3$ で振る舞うのに対し，(8) 式による IR カットオフは $\left(\frac{M_p}{\Lambda_{UV}}\right)^2$ で振る舞う．局所場の理論で自然な Λ_{UV} は M_p を超えないと期待されるため，(8) 式の方が L に対する制限が強い．

4．ホログラフィック・ダークエネルギー

3 章のアイデアをインフレーションに適用した [1] の先行研究である現在の宇宙のダークエネルギーに対して適用した研究 [2] を紹介する．[2] では 3 章で議論した零点エネルギー Λ_{UV}^4 と IR カットオフの間の関係と同様な以下の関係がダークエネルギー ρ_{de} と IR カットオフ L_{IR} の間に成り立つと仮定して解析が行われた．

$$\rho_{de} = \frac{3c^2M_p^2}{8\pi L_{IR}^2} \tag{9}$$

c は L_{IR} や M_p によらない定数である．こうして定義される ρ_{de} をホログラフィック・ダークエネルギーと呼ぶ．また，[2] では宇宙論的に自然な L_{IR} としてハッブル・ホライズン D，粒子ホライズン L_p，イベント・ホライズン L_f が議論されている．まず L_{IR} をハッブル・ホライズン D だと仮定すると，ダークエネルギー成分のエネルギー密度 ρ_{de} と物質成分のエネルギー密度 ρ_m のみのフリードマン方程式 $\rho_{de}+\rho_m = 3M_p^2H^2/8\pi$ と (9) 式より

$$\rho_m = \frac{3(1-c^2)M_p^2}{8\pi}H^2 \tag{10}$$

となる．ここで圧力 p とエネルギー密度 ρ に対する関係式 $p = w\rho$ によって定義される状態方程式パラメータ w を考える．フリードマン方程式から導かれる式 $\dot{\rho}+3H(\rho+p)=0$ より以下の関係が成り立つ．

$$\rho \propto a^{-3(1+w)} \tag{11}$$

(9) 式と (10) 式より ρ_{de} と ρ_m はどちらも H^2 のみに依存する．ρ_m は a^{-3} に比例するので，ρ_{de} も a^{-3} に比例すると考えられる．以上より状態方程式パラメータのダークエネルギー成分 w_{de} は $w_{de}=0$ である．観測から $w_{de}\sim -1.00$ なので [5]，IR カットオフをハッブル・ホライズンと見なすことはできない．次に IR カットオフが粒子ホライズンだと仮定する．ダークエネルギー成分が物質成分に比べて優勢な場合，(3) 式，(9) 式，フリードマン方程式を用いて計算すると以下のようになる．

$$\rho_{de} = \frac{3\alpha^{-2}M_p^2}{8\pi}a^{-2(1+\frac{1}{c})}, \tag{12}$$

$$\therefore w_{de} = -\frac{1}{3}+\frac{2}{3c} > -\frac{1}{3} \tag{13}$$

α は積分定数である．したがって，IR カットオフを粒子ホライズンだと見なすことはできない．さらに，IR カットオフをイベント・ホライズンだと仮定する．同様に (4) 式，(9) 式，フリードマン方程式より以下のようになる．

$$\rho_{de} = \frac{3\alpha^2M_p^2}{8\pi}a^{-2(1-\frac{1}{c})} \tag{14}$$

$$\therefore w_{de} = -\frac{1}{3}-\frac{2}{3c} < -\frac{1}{3} \tag{15}$$

したがって，IR カットオフをイベント・ホライズンだと見なした場合のみ w_{de} の値を満足しうる結果が得られる．

5．ホログラフィック・インフレーション

[1] ではインフレーションを起こすエネルギーと IR カットオフに，(9) 式と同様の関係があると考え，インフレーションの解析が行われている．インフレーション期は高エネルギー状態のため，UV カットオフ Λ_{UV} によって IR カットオフ L_{IR} が以下のように補正されると考え，議論が行われている．

$$L_{IR} \Rightarrow \sqrt{L_{IR}^2+\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}} \tag{16}$$

IR カットオフ L_{IR} を粒子ホライゾン L_p もしくはイベント・ホライゾン L_f だと仮定し，(3) 式，(4) 式，(9) 式，(16) 式を用いて計算すると次のようになる．

$$\dot{H} = -\frac{H^3}{c^2}\left\{m\sqrt{\frac{c^2}{H^2}-\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}+H\left(\frac{c^2}{H^2}-\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}\right)\right\} \tag{17}$$

ただし $m=1$ で L_{IR} を粒子ホライゾンに，$m=-1$ で L_{IR} をイベント・ホライゾンに仮定した場合に相当する．(5) 式，(17) 式を用いて (6) 式の r，n_s を計算すると

$$\begin{aligned} r &= 16\left(1-\frac{H^2}{c^2\Lambda_{UV}^2}+\frac{m\sqrt{c^2-\frac{H^2}{\Lambda_{UV}^2}}}{c^2}\right) \\ n_s &= -1-\frac{2m}{\sqrt{c^2-\frac{H^2}{\Lambda_{UV}^2}}}-\frac{2H^2}{c^2\Lambda_{UV}^2} \end{aligned} \tag{18}$$

となる．[1] では (18) 式が観測結果と比較されている．

6．まとめ

ホログラフィック原理に基づくと，ダークエネルギー ρ_{de} と IR カットオフ L_{IR} の間に関係が示唆される．このように定義されるホログラフィック・ダークエネルギー ρ_{de} は，IR カットオフとして未来のイベント・ホライズン L_f を適用したときに w_{de} の観測結果を満足しうる結果を与えることを示した研究 [2] を紹介した．同様のエネルギー密度をインフレーション期に適用した場合，[1] では UV カットオフ Λ_{UV} による IR カットオフ L_{IR} への補正を導入して r，n_s を表す式を導き，観測結果と比較されていることを紹介した．

参考文献

[1] Shin'ichi Nojiri, Sergei D. Odintsov, Emmanuel N. Saridakis,Phys.Lett.B 797,134829(2019).
[2] M. Li, Phys. Lett. B 603, 1 (2004).
[3] A. G. Cohen, D. B. Kaplan and A. E. Nelson, Phys. Rev. Lett. 82, 497(1999).
[4] D. J. Schwarz, C. A. Terrero-Escalante, and A. A. Garcia, Phys. Lett. B517,243–249(2001).
[5] M. Tanabashi et al. (Particle Data Group),Phys. Rev. D 98, 030001(2018).