O-12

共形不変なゲージ固定項と Maxwell 理論の正準形式

A conformally invariant gauge-fixing term and the canonical formalism of Maxwell theory

○中川弘徳[1]，　鈴木隆史[2]，　出口真一[3]
*Hironori Nakagawa[1], Takafumi Suzuki[2], Shinichi Deguchi[3]

Abstract : We construct a conformally invariant gauge-fixing term and study the canonical formalism of the Maxwell theory with this gauge-fixing term.

1．導入

本研究の目的は, 共形変換のもとで不変なゲージ固定項を構成し，それを含むラグランジアンに基づき Maxwell 理論の正準形式を論じることである．共形変換とは，スケール因子を除き計量を不変に保つ変換であり，世界間隔 d^2s に対して

$$d^2s \ \to \ d^2s' = \varphi(x) d^2s \tag{1}$$

で定義される．ここで，$\varphi(x)(>0)$ はスケール因子である．本研究では，４次元 Minkowski 時空上での共形変換を考える．この変換は並進変換，Lorentz 変換，スケール変換，特殊共形変換から成り，座標 x^μ $(\mu = 0,1,2,3)$ の無限小変換は

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu + bx^\mu + 2\beta^\nu x_\nu x^\mu - \beta^\mu x^\nu x_\nu \tag{2}$$

で与えられる．ここで，a^μ, $\omega^\mu{}_\nu(= -\omega_\nu{}^\mu)$, b, β^μ は共形変換の 15 個のパラメータである．

電磁場のゲージポテンシャル $A_\mu = A_\mu(x)$ の共形変換は Lie 微分の形で

$$\delta_c A_\mu = f^\nu \partial_\nu A_\mu + A_\nu \partial_\mu f^\nu \tag{3}$$

と与えられる．ただし，$f^\mu := a^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu + bx^\mu + 2\beta^\nu x_\nu x^\mu - \beta^\mu x^\nu x_\nu$ である．式 (3) を用いることで Maxwell 作用 $S_{\mathrm{M}} = -\int \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} d^4x$ は共形不変であることがわかる．従って，古典電磁気学である Maxwell 理論は共形不変な理論である．一方，作用 S_{M} はゲージ変換のもとで不変であり，量子化を行う際にはこの自由度を固定する操作（ゲージ固定）が必要になる．従来の多くの議論ではゲージ固定条件として Lorenz ゲージなどの共形不変でないものが用いられてきた．しかし，これは本来 Maxwell 理論がもっている共形不変性を損なうことになる．

本研究では，共形不変性を保つようなゲージ固定条件を考察する．このような条件として Bayen-Flato-Eastwood-Singer (BFES) ゲージ [1, 2] が知られているが，これを共形不変性を保ちながら Maxwell ラグランジアンに付加することは困難である．そこで，新たなゲージ固定条件として非線形ゲージ [3, 4] を採用する．この条件はある状況において，共形不変性を保ちながら Maxwell ラグランジアンに付加することができる．本研究では，これらのことを論じるとともに Maxwell 理論の正準形式を構成し，量子化を試みる．

2．共形不変なゲージ固定項の構成

まず，共形不変なゲージ固定条件として知られる BFES ゲージ

$$\Box \partial^\mu A_\mu = 0 \tag{4}$$

に注目する [1, 2]．式 (3) の変換性とマクスウェル方程式 $\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$ を用いることで BFES ゲージ固定条件は共形不変であることがわかる．

式 (4) を与えるゲージ固定項を Maxwell ラグランジアンに付け加え，ラグランジアン $\mathcal{L}_{\mathrm{BFES}}$ を

$$\mathcal{L}_{\mathrm{BFES}} := -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + B\Box\partial^\mu A_\mu \tag{5}$$

と定義する．ここで，$B = B(x)$ は中西-Lautrup 場であり，式 (5) において B は無次元量なので，その共形変換は

$$\delta_c B = f^\nu \partial_\nu B \tag{6}$$

と与えられる．式 (5) から Euler-Lagrange 方程式として

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} - \partial_\nu \Box B = 0, \quad \Box\partial^\mu A_\mu = 0 \tag{7}$$

が得られる．式 (3) と (6) を用いて式 (5) の共形変換を考察すると，$\int B\Box\partial^\mu A_\mu d^4x$ は共形不変にならないことがわかる．よって，別のゲージ固定条件を考える必要がある．

このような状況に鑑みて，ゲージ固定条件として非線形ゲージ

$$A_\mu A^\mu = \lambda \tag{8}$$

を考える [3, 4]．ここで λ は任意の実定数である．式 (8) の共形変換を考えると，$\lambda = 0$ の場合のみ式 (8) が不変になることがわかる．従って，BFES ゲージの代わりにゲージ固定条件

$$A_\mu A^\mu = 0 \tag{9}$$

を採用する．

[1] 日大理工・院 (前)・量子　[2] 日大理工・研究員・量子　[3] 日大・教員・量科研

式 (9) を与えるゲージ固定項を Maxwell ラグランジアンに付け加え，ラグランジアン $\mathcal{L}_{\mathrm{DN}}$ を

$$\mathcal{L}_{\mathrm{DN}} := -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}BA_\mu A^\mu \tag{10}$$

と定義する．ここで，$B = B(x)$ は質量次元 2 をもち，その共形変換は

$$\delta_c B = f^\nu \partial_\nu B + \frac{1}{2}B\partial_\nu f^\nu \tag{11}$$

と与えられる．式 (10) から Euler-Lagrange 方程式として

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + BA_\nu = 0, \quad A_\mu A^\mu = 0 \tag{12}$$

が得られる．式 (3) と (11) を用いることで $\int \frac{1}{2}BA_\mu A^\mu d^4x$ は共形不変であることが確認できる．以上のように，共形不変なゲージ固定項が得られた．

３．正準形式

式 (10) で定められる理論の正準形式を考察する．この理論では拘束条件が導かれるため，Dirac の手法に従い正準形式を構成する．今考えている理論で正準座標は場 A_μ, B であり，それらに対応する共役運動量は

$$\Pi_\mu := \frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{DN}}}{\partial(\partial_0 A^\mu)} = F_{\mu 0},\ \Pi_B := \frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{DN}}}{\partial(\partial_0 B)} = 0 \tag{13}$$

である．これより第 1 次拘束条件

$$\phi_1 := \Pi_0 = 0,\ \phi_2 := \Pi_B = 0 \tag{14}$$

が得られる．場 A_μ, B と共役運動量 Π_μ, Π_B との Poisson 括弧は

$$\begin{aligned}\{\Pi^\mu(t,\boldsymbol{x}), A_\nu(t,\boldsymbol{y})\} &= -\delta^\mu{}_\nu\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),\\ \{\Pi_B(t,\boldsymbol{x}), B(t,\boldsymbol{y})\} &= -\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\end{aligned} \tag{15}$$

であり，拘束条件 (14) との間に矛盾が生じる．そのため，拘束条件 (14) は Poisson 括弧の外でのみ有効であると考える．このとき，$\Pi_0 = 0,\ \Pi_B = 0$ は弱い等号 $\approx$ を用いて $\Pi_0 \approx 0,\ \Pi_B \approx 0$ と表す．また，正準ハミルトニアン密度 $\mathcal{H}$ は式 (10) の Legendre 変換により

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\Pi_i\Pi_i + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} + A_0\partial_i\Pi_i - \frac{1}{2}BA_\mu A^\mu \tag{16}$$

$(i, j = 1, 2, 3)$ と導出され，全ハミルトニアン H_T は Lagrange 未定乗数 u_1，u_2 を用いて

$$H_T = \int d^3x\,[\mathcal{H}(x) + u_1(x)\phi_1(x) + u_2(x)\phi_2(x)] \tag{17}$$

と定義される．拘束条件 (14) は任意の時刻で成立する必要がある．従って，この条件の時間発展として第 2 次拘束条件

$$\phi_3 := -\partial_i\Pi_i + BA_0 \approx 0,\ \phi_4 := \frac{1}{2}A_\mu A^\mu \approx 0 \tag{18}$$

が導かれる．さらに，拘束条件 (18) の時間発展から Lagrange 未定乗数 u_1，u_2 が

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{A_i}{A_0}(\Pi_i - \partial_i A_0)\\ u_2 &= -\frac{1}{A_0}\left\{\frac{A_iB}{A_0}(\Pi_i - \partial_i A_0) + \partial_i(A_iB)\right\}\end{aligned} \tag{19}$$

と定まる．

量子化の準備として，拘束条件 (14) と (18) から Dirac 括弧を次のように定義する．

$$\begin{aligned}&\{X(x), Y(y)\}_{\mathrm{D}} = \{X(x), Y(y)\}\\ &\quad - \int d^3z d^3u \{X(x), \phi_a(z)\} C^{-1}_{ab}(z, u)\{\phi_b(u), Y(y)\}\end{aligned} \tag{20}$$

$(a, b = 1, 2, 3, 4)$．ここで，$C_{ab}(x, y) = \{\phi_a(x), \phi_b(y)\}$ である．Dirac 括弧を用いる限り拘束条件は括弧内でも有効である．また，全ハミルトニアン H_T は

$$H_T = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\Pi_i\Pi_i + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} \pm \partial_i\Pi_i\sqrt{A_jA_j}\right] \tag{21}$$

となる．

４．まとめと今後の課題

本研究では, 共形不変なゲージ固定項を構成することができた．また，それを含むラグランジアンをもとに Maxwell 理論の正準形式を構成し，量子化の準備を行った．より具体的には，Dirac 括弧 (20) を定義し，全ハミルトニアン (21) を導いた．

今後の課題として，この理論が持つ共形対称性を反映した Noether カレントを導出することが挙げられる．また，量子化したのちに Noether 電荷間の交換関係を調べ，量子論の段階での共形対称性を確認することも課題である．さらに，ラグランジアン (10) に相互作用項を加えた場合を考察する必要がある．一方，ゲージ固定条件 (9) を解くと A_μ はスピノル添字を用いて

$$A_\mu \ \to\ A_{\alpha\dot{\alpha}} = \bar{A}_\alpha A_{\dot{\alpha}} \tag{22}$$

$(\alpha = 1, 2)$ と書き表すことができる．これを用いて新たな定式化を探ることも興味深い課題である．

参考文献

[1] F. Bayen and M. Flato, J. Math. Phys. **17** (1976), 1112.

[2] M. Eastwood and M. Singer, Phys. Lett. B **107** (1985), 73.

[3] P. M. A. Dirac, Proc. Roy. Soc. A **209** (1951), 291.

[4] Y. Nambu, Prog. Theor. Phys. Suppl. E **68** (1968), 190.