O-13

Caldirola-Kanai ラグランジアンの１次形式と減衰調和振動子の正準量子化

A first order form of the Caldirola-Kanai Lagrangian and the canonical quantization of the damped harmonic oscillator

○戸町武秀[1]，　鈴木隆史[2]，　出口真一[3]
*Takehide Tomachi[1], Takafumi Suzuki[2] Shinichi Deguchi[3]

Abstract : We present a first order form of the Caldirola-Kanai Lagrangian. Using this form, we perform the canonical quantization of the damped harmonic oscillator. Also we try to extend it to the Fermionic and supersymmetric cases.

１．導入

本研究の目的は, 最も簡単な散逸系の一つである減衰調和振動子の解析力学を考察して，それに基づき減衰調和振動子の正準量子化を行うことである．減衰調和振動子の運動方程式は

$$m\ddot{x}+\gamma\dot{x}+kx=0,\quad 4mk>\gamma^2 \tag{1}$$

と与えられる．ここで, $x=x(t)$ は質点の座標, m は質点の質量, γ は減衰係数, k はばね定数である．式 (??) を導出するラグランジアンとして, 様々なものが知られている．本研究ではその中でも多くの人々により議論されてきた Caldirola-Kanai ラグランジアン [?, ?]

$$L_{\rm CK}=e^{\frac{\gamma}{m}t}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2-\frac{k}{2}x^2\right) \tag{2}$$

を考える. このラグランジアンの特徴として, あらわに時間に依存することが挙げられる．式 (??) をもとに正準量子化を行うと，Bose 粒子的な自由度を持つ模型が得られる [?]. これを踏まえて, 本研究では Fermi 粒子的な自由度を与える減衰調和振動子模型を提唱する．そのために, まず Caldirola-Kanai ラグランジアン $L_{\rm CK}$ を 1 次形式に書き直し, それをもとに正準形式と正準量子化を考察する．その後，１次形式に含まれる座標変数を Grassman 数に置き換えて Fermi 粒子的な減衰調和振動子を記述するラグランジアンを与える．さらに，このラグランジアンに基づき正準量子化を行い Fermi 粒子的な自由度を持つ模型を考察する．最後に，超対称性を持つ減衰調和振動子模型を論じる．

２．Caldirola-Kanai ラグランジアンの一次形式

１次形式のラグランジアンとして

$$L'_{\rm CK}=m\Omega e^{\frac{\gamma}{m}t}\left\{\frac{i}{2}\left(\dot{z}\bar{z}-\dot{\bar{z}}z\right)-\Omega\bar{z}z\right\} \tag{3}$$

を考える．ここで，z と $\bar{z}$ は複素変数であり，$\Omega\equiv\sqrt{\omega^2-\frac{\gamma^2}{4m^2}}$, $\omega\equiv\sqrt{\frac{k}{m}}$ である．以下に $L_{\rm CK}$ と $L'_{\rm CK}$ の同等性を示す．複素変数 z と $\bar{z}$ を実変数 x と y を用いて

$$z=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+iy\right),\quad \bar{z}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-iy\right) \tag{4}$$

と表し, 式 (??) に代入すると次式が得られる:

$$L'_{\rm CK}=m\Omega e^{\frac{\gamma}{m}t}\left\{-\frac{1}{2}\left(x\dot{y}-\dot{x}y\right)-\frac{\Omega}{2}\left(x^2+y^2\right)\right\}. \tag{5}$$

式 (??) を y に関する Euler-Lagrange 方程式に代入すると

$$y=\frac{1}{\Omega}\left(\dot{x}+\frac{\gamma}{2m}x\right) \tag{6}$$

が得られ, これを式 (??) に代入すると $L'_{\rm CK}$ は $L_{\rm CK}$ に帰着することがわかる．ただし，計算の途中で表れる全微分項 $\frac{d}{dt}\left(\frac{m\Omega}{2}e^{\frac{\gamma}{m}t}xy\right)$ は作用に影響を与えないので無視した．以上のことから式 (??) と式 (??) は同等であることがわかる．

式 (??) に全微分項 $\frac{d}{dt}\left(\frac{im\Omega}{2}e^{\frac{\gamma}{m}t}\bar{z}z\right)$ を加えると $L'_{\rm CK}$ は

$$L'_{\rm CK}=m\Omega e^{\frac{\gamma}{m}t}\left\{i\bar{z}\dot{z}+\left(\frac{i\gamma}{2m}-\Omega\right)\bar{z}z\right\} \tag{7}$$

となる．この式から正準運動量が

$$P_z\equiv\frac{\partial L'_{\rm CK}}{\partial\dot{z}}=im\Omega e^{\frac{\gamma}{m}t}\bar{z},\quad P_{\bar{z}}\equiv\frac{\partial L'_{\rm CK}}{\partial\dot{\bar{z}}}=0 \tag{8}$$

と定まり，ハミルトニアンが

$$H'_{\rm CK}=\dot{z}P_z+\dot{\bar{z}}P_{\bar{z}}-L'_{\rm CK}=\left(i\Omega+\frac{\gamma}{2m}\right)P_z z \tag{9}$$

と求まる．このとき，独立な正準変数は z と P_z であり，$\bar{z}$ と $P_{\bar{z}}$ は式 (??) から定まる従属変数として扱われる．よって考慮すべき Poisson 括弧は $\{z,P_z\}_{\rm PB}=1$ のみである．

次に, 正準量子化を行う．正準変数 z と P_z を演算子 $\hat{z}$ と $\hat{P}_z$ に置き換え，Poisson 括弧から定まる交換関係 $\left[\hat{z},\hat{P}_z\right]_-=i\hbar$ を置く．式 (??) の第 1 式を考慮すると $\left[\hat{z},\hat{\bar{z}}\right]_-=\frac{\hbar}{m\Omega}e^{-\frac{\gamma}{m}t}$ が得られ，さらに，a と $a^\dagger$ を

$$a\equiv\sqrt{\frac{m\Omega}{\hbar}}e^{\frac{\gamma}{2m}t}\hat{z},\quad a^\dagger\equiv\sqrt{\frac{m\Omega}{\hbar}}e^{\frac{\gamma}{2m}t}\hat{\bar{z}} \tag{10}$$

と定義すると，交換関係 $\left[a,a^\dagger\right]_-=1$ が得られる．いま $a\left|0\right\rangle=0$ を置くと，a は消滅演算子，$a^\dagger$ は生成演算子であり，この模型は Bose 粒子的であることがわかる．Weyl オーダーをとったハミルトニアン演算子を計算すると

$$\hat{H}'_{\rm CK}=\hbar\left(\Omega-\frac{i\gamma}{2m}\right)\left(N_{\rm B}+\frac{1}{2}\right) \tag{11}$$

[1] 日大理工・院 (前)・量子　[2] 日大理工・研究員・量子　[3] 日大・教員・量科研

が求まる．ここで, 数演算子 $N_{\rm B}\equiv a^\dagger a$ を定義した．固有値方程式 $\hat{H}'_{\rm CK}\left|n_{\rm B}\right\rangle = E_{\rm B}\left|n_{\rm B}\right\rangle$ を考えると，固有値 $E_{\rm B}$ が

$$E_{\rm B}=\hbar\Omega\left(n_{\rm B}+\frac{1}{2}\right)-i\frac{\hbar\gamma}{2m}\left(n_{\rm B}+\frac{1}{2}\right) \tag{12}$$

$(n_{\rm B}=0,1,2,...)$ と導かれる．先行研究 [?, ?] においては式 (??) の虚数部分が含まれておらず，他の先行研究 [?, ?] では次のような結果が得られている:

$$E_{\rm B}=\hbar\Omega\left(n_{\rm B}+\frac{1}{2}\right)+i\frac{\hbar\gamma}{4m}. \tag{13}$$

式 (??) は式 (??) から Schrödinger の波動方程式を経て導出された固有値である．以上のように，固有値の虚数部分に差異が生じる原因は今の所明らかではない．

次に，固有ベクトルの時間発展を考える．Schrödinger 方程式の形式解 $\left|n_{\rm B},t\right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}'_{\rm CK}t}\left|n_{\rm B},0\right\rangle$ に式 (??) を代入すると

$$\left|n_{\rm B},t\right\rangle = e^{-i\Omega\left(n_{\rm B}+\frac{1}{2}\right)t}e^{-\frac{\gamma}{2m}\left(n_{\rm B}+\frac{1}{2}\right)t}\left|n_{\rm B},0\right\rangle \tag{14}$$

が求まり，時間が経つと確率密度が減少することがわかる．これは，粒子の崩壊を表していると考えられる．

３．Fermi 粒子的な模型の考察

次に, Fermi 粒子的な自由度を与える模型を構築する．式 (??) において変数 z と $\bar{z}$ を Grassman 数 ψ と $\bar{\psi}$ に置き換え，次のラグランジアン

$$L''_{\rm CK}=m\Omega e^{\frac{\gamma}{m}t}\left\{i\bar{\psi}\dot{\psi}+\left(\frac{i\gamma}{2m}-\Omega\right)\bar{\psi}\psi\right\} \tag{15}$$

を考える．Grassman 数 ψ と $\bar{\psi}$ は，$\psi\bar{\psi}=-\bar{\psi}\psi, \psi^2=\bar{\psi}^2=0$ という性質を持つ．式 (??) から正準運動量が

$$P_\psi\equiv\frac{\partial L''_{\rm CK}}{\partial\dot{\psi}}=-im\Omega e^{\frac{\gamma}{m}t}\bar{\psi},\ \ P_{\bar{\psi}}\equiv\frac{\partial L''_{\rm CK}}{\partial\dot{\bar{\psi}}}=0 \tag{16}$$

と定まり，ハミルトニアンが

$$H''_{\rm CK}=\dot{\psi}P_\psi+\dot{\bar{\psi}}P_{\bar{\psi}}-L''_{\rm CK}=\left(i\Omega+\frac{\gamma}{2m}\right)P_\psi\psi \tag{17}$$

と求まる．このとき，独立な正準変数は ψ と P_ψ であり，$\bar{\psi}$ と $P_{\bar{\psi}}$ は式 (??) から定まる従属変数である．よって考慮すべき Poisson 括弧は $\{\psi,P_\psi\}_{\rm PB}=1$ のみである．

次に, 正準量子化を行う．正準変数 ψ と P_ψ を演算子 $\hat{\psi}$ と $\hat{P}_\psi$ に置き換え，Poisson 括弧から定まる反交換関係 $\left[\hat{\psi},\hat{P}_\psi\right]_+=-i\hbar$ を置く．式 (??) の第 1 式を考慮に入れると $\left[\hat{\psi},\hat{\bar{\psi}}\right]_+=\frac{\hbar}{m\Omega}e^{-\frac{\gamma}{m}t}$ が得られ，さらに，b と $b^\dagger$ を

$$b\equiv\sqrt{\frac{m\Omega}{\hbar}}e^{\frac{\gamma}{2m}t}\hat{\psi},\ \ b^\dagger\equiv\sqrt{\frac{m\Omega}{\hbar}}e^{\frac{\gamma}{2m}t}\hat{\bar{\psi}} \tag{18}$$

と定義すると反交換関係 $\left[b,b^\dagger\right]_+=1,\ \left[b,b\right]_+=0,\ \left[b^\dagger,b^\dagger\right]_+=0$ が得られる．いま $b\left|0\right\rangle=0$ を置くと，b は消滅演算子 , $b^\dagger$ は生成演算子であり，この模型は Fermi 粒子的であることがわかる．Weyl オーダーをとったハミルトニアン演算子を計算すると

$$\hat{H}''_{\rm CK}=\hbar\left(\Omega-\frac{i\gamma}{2m}\right)\left(N_{\rm F}-\frac{1}{2}\right) \tag{19}$$

が求まる．ここで, 数演算子 $N_{\rm F}\equiv b^\dagger b$ を定義した．固有値方程式 $\hat{H}''_{\rm CK}\left|n_{\rm F}\right\rangle=E_{\rm F}\left|n_{\rm F}\right\rangle$ を考えると固有値 $E_{\rm F}$ が

$$E_{\rm F}=\hbar\Omega\left(n_{\rm F}-\frac{1}{2}\right)-i\frac{\hbar\gamma}{2m}\left(n_{\rm F}-\frac{1}{2}\right) \tag{20}$$

$(n_{\rm F}=0,1)$ と導かれる．

次に，固有ベクトルの時間発展を考える．Schrödinger 方程式の形式解に式 (??) を代入すると

$$\left|n_{\rm F},t\right\rangle=e^{-i\Omega\left(n_{\rm F}-\frac{1}{2}\right)t}e^{-\frac{\gamma}{2m}\left(n_{\rm F}-\frac{1}{2}\right)t}\left|n_{\rm F},0\right\rangle \tag{21}$$

が求まる．これより $n_{\rm F}=0$ のときは時間が経つと確率密度が増加し，$n_{\rm F}=1$ のときは時間が経つと確率密度が減少することがわかる．

４．超対称性を持つ減衰調和振動子模型

次に，Bose 粒子的な模型と Fermi 粒子的な模型が共存し，その間に超対称性がある場合を考える．このとき，ハミルトニアン演算子は

$$\hat{H}=\hat{H}'_{\rm CK}+\hat{H}''_{\rm CK}=\hbar\left(\Omega-\frac{i\gamma}{2m}\right)(N_{\rm B}+N_{\rm F}) \tag{22}$$

となる．この式を Schrödinger 方程式の形式解に代入すると

$$\left|n_{\rm B},n_{\rm F},t\right\rangle=e^{-i\Omega(n_{\rm B}+n_{\rm F})t}e^{-\frac{\gamma}{2m}(n_{\rm B}+n_{\rm F})t}\left|n_{\rm B},n_{\rm F},0\right\rangle \tag{23}$$

が求まる．式 (??) において $n_{\rm B}=n_{\rm F}=0$ のとき

$$\left|0,0,t\right\rangle=\left|0,0,0\right\rangle \tag{24}$$

が導かれるため，超対称性を持つ減衰調和振動子模型では真空状態は安定していることがわかる．

５．まとめと今後の課題

本研究では，Caldirola-Kanai ラグランジアン (??) と同等な 1 次形式のラグランジアン (??) 及び (??) を与え，式 (??) をもとに正準形式と正準量子化を考察した．その結果，今回得られた固有値は先行研究 [?, ?] や [?, ?] にある固有値と異なることを確認した．また，Fermi 粒子的な減衰調和振動子を記述するラグランジアン (??) を与え, 正準量子化を行い Fermi 粒子的な自由度を持つ模型を考察した．さらに，超対称性を持つ減衰調和振動子模型を考えた．

今後の課題として，先行研究と結果が異なった原因を探る必要がある．また，あらわに時間に依存しない減衰調和振動子のラグランジアンである Bateman ラグランジアンに関しても同様の考察を行うことが挙げられる．

参考文献

[1] P. Caldirola, Nuovo Cim. **18**, 393 (1941).
[2] E. Kanai, Prog. Theor. Phys. **3**, 440 (1948).
[3] M. Serhan et al., J. Math. Phys. **59**, 082105 (2018).
[4] E. H. Kernr, Can. J. Phys. **36**, 371 (1958).
[5] Z. Ahmed et al., arXiv:1902.04895 [quant-ph].