O-6

一様磁場中のランダム FKG-Ising 系に RSB 相がないこと

Absence of replica symmetry breaking in disordered FKG-Ising models under uniform field

○宇都宮靖之[1]，　糸井千岳[2]
*Y. Utsunomiya[1], C. Itoi[2]

Abstract : We prove that the variance of spin overlap vanishes in disordered Ising models satisfying the Fortuin-Kasteleyn-Ginibre (FKG) inequality under a uniform field, such as generally distributed random field Ising model, site- and bond-diluted Ising models with the Bernoulli distribution. Chatterjee ’ s proof for the Gaussian random field Ising model is generalized to other independent identically distributed quenched disorder.

1．導入

ランダム磁場が Gauss 分布に従うランダム磁場 Ising 模型 にレプリカ対称性の破れは存在しないことは 2015 年に Chatterjee によって証明された。ランダム磁場 Ising 模型のように、ランダムな相互作用と強磁性的な交換相互作用を持つ Ising 模型には二点連結相関関数は Fortuin-Kasteleyn-Ginibre(FKG 不等式) を満たす。Chattejee の証明においてはこの FKG 不等式が本質的な役割を果たしている。本講演ではランダム相互作用がガウス分布ではないランダム FKG-Ising 系に Chatterjee の定理を拡張し、レプリカ対称性の破れがないことを証明する。

2. Chatterje の定理

Random filed Ising 模型においてレプリカ対称性の破れがない Chaterjee の定理について説明する。Random filed Ising 模型のハミルトニアンは以下の形で与えられる。

$$H = -\sum_{|x-y|=1} \sigma_x \sigma_y - \sum_{x\in\Lambda_L} b g_x \sigma_x. \tag{1}$$

格子点数を $|\Lambda_L|$ として 2 つのレプリカ $a, b (= 1, 2, \cdots, n)$ 間のスピンの重なりを

$$R_{a,b} = \frac{1}{|\Lambda_L|} \sum_{x\in\Lambda_L} \sigma_x^a \sigma_x^b, \tag{2}$$

と定義するとき、独立な Gauss 分布に従う Random filed Ising 模型に対してほとんどすべての結合定数に対して

$$\lim_{L\to\infty} [\mathbb{E}\langle R_{1,2}^2\rangle - (\mathbb{E}\langle R_{1,2}\rangle)^2] = 0. \tag{3}$$

を厳密に証明できる。これはレプリカ対称性の破れがないことを示している。

3. FKG-Ising 模型の定義と主定理

FKG-Ising 模型について説明する。任意の格子点 $x, y \in \Lambda_L$ におけるスピン変数 σ_x, σ_y の広義単調増加関数の二点連結相関関数が半正定値 となる系を Fortuin-Kasteleyn-Ginibre (FKG) 系と呼ぶ. 例えば，格子の各点にランダムな磁場 σ_x を挿入した次のハミルトニアン

$$H_{RFI} = -\sum_{|x-y|=1} \sigma_x \sigma_y - \sum_{x\in\Lambda_L} (br_x + h)\sigma_x \tag{4}$$

で定義されるランダム磁場 Ising 模型は FKG 系である. 同様に強磁性的な交換相互作用 $J_{x,y}$ を持つハミルトニアン

$$H_{BDI} = -J \sum_{|x-y|=1} r_{xy} \sigma_x \sigma_y - \sum_{x\in\Lambda_L} h\sigma_x \tag{5}$$

で定義されるボンド希釈 Ising 模型も FKG 系である. ただし，$J_{x,y}$ は一般的な二項分布関数 に従う交換相互作用である. これらの模型の二点連結相関関数は FKG 不等式を満たすため以下の定理を厳密に証明できる.

定理　一様磁場 h が印加され，期待値がゼロで分散 V が有限な独立同意分布に従うランダム相互作用を持つ FKG-Ising 系を考える．試料期待値を $\mathbb{E}$，2 つのレプリカ間のスピンの重なりを $R_{1,2} = \frac{1}{|\Lambda_L|}\sum_{x\in\Lambda_L} \sigma_x^1 \sigma_x^2$ で表すとき，無限体積極限 $\lim_{|\Lambda_L|\to\infty} \mathbb{E}\langle R_{1,2}\rangle$ が存在し、ほとんどすべての結合定数に対して

$$\lim_{L\to\infty} [\mathbb{E}\langle R_{1,2}^2\rangle - (\mathbb{E}\langle R_{1,2}\rangle)^2] = 0. \tag{6}$$

この定理はこの系の異なるレプリカ間のスピンの重なりに，レプリカ対称性の破れがないことを 示している.Chaterjee は Gauss 分布に従うランダム磁場 Ising 模型に対して証明したが，我々 は彼の定理を拡張し，ランダム相互作用が Gauss 分布ではないランダム FKG-Ising 系に対して 以下の仮定を用いて証明した.

5. 証明

補題 1 任意の逆温度と一様磁場 (β, h) に対して，自由エネルギー密度は次の分散不等式を満たす

$$\mathbb{E}\psi_L(\beta, h, r)^2 - p_L(\beta, h)^2 \le \frac{C}{|\Lambda_L|}. \tag{7}$$

---

[1] 日大理工・院 (前)・物理　[2] 日大理工

証明　確率変数に番号を $(r_m)_{m=1,\cdots,N}$ と付け，$(r_k)_{k>m}$ に対する期待値を $\mathbb{E}_m$ と書くとき

$$\mathbb{E}\psi_L(r)^2-(\mathbb{E}\psi_L(r))^2=\mathbb{E}(\mathbb{E}_N\psi_L(r))^2-\mathbb{E}(\mathbb{E}_0\psi_L(r))^2$$
$$=\sum_{m=1}^{N}\mathbb{E}[(\mathbb{E}_m\psi_L(r))^2-(\mathbb{E}_{m-1}\psi_L(r))^2]$$

$\psi_L(r)$ を r_m の関数として考えると

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[(\mathbb{E}_m\psi_L(r_m))^2-(\mathbb{E}_{m-1}\psi_L(r_m))^2]\\&=\mathbb{E}[\mathbb{E}_m\mathbb{E}'(\psi_L(r_m)-\psi_L(r'_m))]^2\\&\le\frac{4\beta^2}{|\Lambda_L|^2}V(\sum_{X_m}1)^2\\&\le\frac{C}{|\Lambda_L|^2}.\end{aligned}\tag{8}$$

補題 2 任意の $\beta>0$ とほとんど全ての一様磁場 h に対して，次のスピンの重なりに対する分散不等式が成り立つ

$$\lim_{L\to\infty}[\langle R_{1,2}^2\rangle-\langle R_{1,2}\rangle^2]=0.\tag{9}$$

証明　スピンの重なりの次の分散を相関関数で表し FKG 不等式を用いると

$$\begin{aligned}&\langle R_{1,2}^2\rangle-\langle R_{1,2}\rangle^2=\frac{1}{|\Lambda_L|^2}\sum_{x,y\in\Lambda_L}(\langle\sigma_x\sigma_y\rangle^2-\langle\sigma_x\rangle^2\langle\sigma_y\rangle^2)\\&=\frac{1}{|\Lambda_L|^2}\sum_{x,y\in\Lambda_L}(\langle\sigma_x\sigma_y\rangle-\langle\sigma_x\rangle\langle\sigma_y\rangle)(\langle\sigma_x\sigma_y\rangle+\langle\sigma_x\rangle\langle\sigma_y\rangle)\\&\le\frac{2}{|\Lambda_L|^2}\sum_{x,y\in\Lambda_L}|\langle\sigma_x\sigma_y\rangle-\langle\sigma_x\rangle\langle\sigma_y\rangle|]\\&=\frac{2}{|\Lambda_L|^2}\sum_{x,y\in\Lambda_L}(\langle\sigma_x\sigma_y\rangle-\langle\sigma_x\rangle\langle\sigma_y\rangle)\\&=\frac{2}{|\Lambda_L|^2\beta}\sum_{x\in\Lambda}\frac{\partial}{\partial h}\langle\sigma_x\rangle_\mu.\end{aligned}\tag{10}$$

任意の区間における h の積分は以下で表される

$$\begin{aligned}&\int_b^a dh(\langle R_{1,2}^2\rangle_h-\langle R_{1,2}\rangle_h^2)\\&\le\frac{2}{\beta|\Lambda_L|^2}\sum_{x\in\Lambda_L}[\langle\sigma_x\rangle_{h=b}-\langle\sigma_x\rangle_{h=a}]\\&\le\frac{4}{\beta|\Lambda_L|}\end{aligned}$$

無限体積極限を取ると，右辺は消え，優収束定理を用いると被積分関数はこの極限で消える事が示される．

定義 人工的な Gauss 型の摂動ハミルトニアンを導入し、摂動ハミルトニアン密度を定義する

$$H_\mu=H_{FKG}-\mu|\Lambda_L|\xi_L\tag{11}$$

$$\xi_L=\frac{1}{|\Lambda_L|}\sum_{x\in\Lambda_L}g_x\sigma_x\tag{12}$$

補題 3 摂動ハミルトン密度の分散はほとんど全ての (β,h) に対し無限体積極限で次のように消える．

$$\lim_{L\to\infty}\frac{\nu(L)}{|\Lambda_L|}=0,\qquad\lim_{L\to\infty}\nu(L)\mathbb{E}\langle\delta\xi_L^2\rangle_\mu=0.\tag{13}$$

同様に，ほとんど全ての (β,h) で以下を満たす．

$$\lim_{L\to\infty}\frac{\nu(L)}{|\Lambda_L|^{\frac14}}=0,\qquad\lim_{L\to\infty}\nu(L)\mathbb{E}\langle|\Delta\xi_L|\rangle_\mu=0.\tag{14}$$

$$\lim_{L\to\infty}\nu(L)\mathbb{E}|\langle\xi_L\rangle_\mu-\mathbb{E}\langle\xi_L\rangle_\mu|=0.\tag{15}$$

補題 4 体積の関数 $\mu(L)$ は $\lim_{L\to\infty}|\Lambda_L|^{-\frac14}\mu(L)^{-1}=0$ とすると任意のスピン配位 σ の関数 $f(\sigma)$ とほとんど全ての (β,h) に対して次の Ghilanda-Guerra 等式が成り立つ

$$\begin{aligned}&\lim_{L\to\infty}[\sum_{a=2}\mathbb{E}\langle R_{a,b}f\rangle_{\mu(L)}-n\mathbb{E}\langle R_{1,n+1}f\rangle_{\mu(L)}\\&\quad+\mathbb{E}\langle R_{1,2}\rangle_{\mu(L)}\mathbb{E}\langle f\rangle_{\mu(L)}]=0.\end{aligned}\tag{16}$$

この等式による重なりの 2 つの分散間の関係

$$\begin{aligned}&2\lim_{L\to\infty}\mathbb{E}\langle(R_{1,2}-\mathbb{E}\langle R_{1,2}\rangle_{\mu(L)})^2\rangle_{\mu(L)}\\&=3\lim_{L\to\infty}\mathbb{E}\langle(R_{1,2}-\langle R_{1,2}\rangle_{\mu(L)})^2\rangle_{\mu(L)}\end{aligned}\tag{17}$$

補題 5 スピンの重なりの摂動に対する連続性

$$\lim_{L\to\infty}\langle R_{1,2}\rangle_{\mu(L)}=\lim_{L\to\infty}\langle R_{1,2}\rangle_0\tag{18}$$

$$\lim_{L\to\infty}\mathbb{E}\langle R_{1,2}\rangle_{\mu(L)}^2=\lim_{L\to\infty}\mathbb{E}\langle R_{1,2}\rangle_0^2,\tag{19}$$

この等式により重なりの 2 つの分散間の関係が

$$\begin{aligned}&2\lim_{L\to\infty}\mathbb{E}\langle(R_{1,2}-\mathbb{E}\langle R_{1,2}\rangle_0)^2\rangle_0\\&=3\lim_{L\to\infty}\mathbb{E}\langle(R_{1,2}-\langle R_{1,2}\rangle_0)^2\rangle_0\end{aligned}$$

6. 結論

補題 1 から補題 5 を用いることで FKG-Ising モデルにおけるレプリカ対称性の破れがないことがわかった

$$\lim_{L\to\infty}[\mathbb{E}\langle R_{1,2}^2\rangle_0-(\mathbb{E}\langle R_{1,2}\rangle_0)^2]=0,\tag{20}$$

参考文献

[1] S. Chaterjee, Math. Phy. 337, 93(2015).
[2] C. Itoi, J. Stat. phys. 174 - (2019).
[3] Roldan, J. and Vira, R, arxXv:1811.07003v2 (2018).
[4] Itoi, C and Utsunomiya, Journal of Mathematical Physics. (2019).
[5] Talagrand, M. : The Parisi formula. Ann. Math. 163, 221-263 (2006).
[6] Talagrand, M. : Mean field models for spin glasses. Springer, Berlin (2011).