O-7

# 超対称ゲージ理論と非摂動効果

## Seiberg-Witten 理論における低エネルギー有効作用の厳密解

## Non-perturbative effects in supersymmetric gauge theory

## The exact solution for the low energy effective action in the Seiberg-Witten theory

○今関大陸[1]

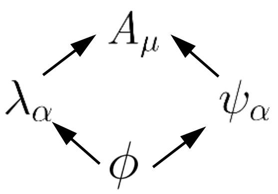
*Hiromu Imazeki

Abstract: We review the Seiberg-Witten theory. The exact solution for the low energy effective action is determined in this theory. The low energy lagrangian is described by a holomorphic function called prepotential. It is difficult to determine the prepotential including non-perturbative instantons effects. Seiberg and Witten used the periods on a Riemann surface (torus) to obtain the exact solution.

## １．目的と背景

超対称性を持つ理論では，非摂動計算の解を厳密に求められる場合がある．１９９４年に Seiberg と Witten は$\mathcal{N}=2$超対称ゲージ理論の低エネルギー有効理論を厳密に決定した[1]． 本研究では Seiberg-Witten 理論をレビューし，超対称性が非摂動計算の厳密解の導出にどのように寄与するか理解することを目的とした．

この節ではまず超対称ゲージ理論の特徴を見る．



$\phi$ : Higgs

$\psi_\alpha$: left-handed Higgsino

$A_\mu$: Gauge field

$\lambda_\alpha$: left-handed Gaugino

**Figure1.** N=2 vector multiplet
Spinor index : $\alpha=1,2$

$\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論はベクトル多重項という図１に示した粒子が組む多重項で記述される．以下ではゲージ対称性として SU(2)を考える．ラグランジアンをグラスマン量の座標$\theta$，$\bar\theta$を導入して超場形式で表すと，$\mathcal{N}=1$ カイラル超場$\Phi$ ($\phi$,$\psi_\alpha$を含む）と$\mathcal{N}=1$ベクトル超場$V$（ゲージ場の強さ$A^a_\mu$，$\lambda_\alpha$を含む）を用いて

$$\mathcal{L}=\frac{1}{4\pi}\mathrm{ImTr}\left[\int \mathrm{d}^2\theta\mathrm{d}^2\bar\theta\tau_{\mathrm{cl}}\Phi^\dagger\mathrm{e}^{2V}\Phi+\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^2\theta\tau_{\mathrm{cl}}W^\alpha W_\alpha\right] \tag{1}$$

と書ける．(1)でベクトル超場$V$から作られるカイラル超場を$W_\alpha$とした．ここで複素結合定数

$$\tau_{\mathrm{cl}}=\frac{\theta_{\mathrm{YM}}}{2\pi}+\frac{4\pi i}{g^2}\quad,\quad \mathrm{Im}\tau>0 \tag{2}$$

を用いた．ゲージ結合定数を$g$，真空角を$\theta_{\mathrm{YM}}$とした．正定値性は$\tau$の虚部がゲージ場の運動項の係数になっていることから要請される．

$\mathcal{N}=2$ 超対称ラグランジアンをプレポテンシャルと呼ばれる正則関数$\mathcal{F}$を用いて，以下のより一般の形で書くことができる．

$$\mathcal{L}=\frac{1}{4\pi}\mathrm{Im}\left[\int\mathrm{d}^2\theta\mathrm{d}^2\bar\theta(\Phi^\dagger\mathrm{e}^{2V})^a\frac{\partial\mathcal{F}(\Phi)}{\partial\Phi_a}+\int\mathrm{d}^2\theta\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{F}(\Phi)}{\partial\Phi_a\partial\Phi_b}W^{\alpha a}W^b_\alpha\right] \tag{3}$$

(3)で添え字$a$は SU(2)随伴表現の添え字である．

超対称性をもつ理論の性質として，真空のエネルギーが０になる．理論がこの性質を満たし$\mathcal{N}=2$　超対称性を保つため$[\phi,\phi^\dagger]=0$ が成り立つ必要がある．これを満たすのは

$$\langle\phi\rangle=\frac{1}{2}a\sigma^3\quad \text{ここで}\ a=\langle\phi^3\rangle \tag{4}$$

の時となる．ヒッグス場が０でない真空期待値を持つため，ゲージ対称性は SU(2)から U(1)に破れる．ヒッグス機構で質量を獲得した粒子について経路積分を実行することで，零質量粒子のみが現れる低エネルギー有効理論を得る．通常経路積分の実行は困難だが，超対称性による制限からラグランジアンは(3)式の形をとらなくてはならない．よって，有効ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\mathrm{eff}}=\frac{1}{4\pi}\mathrm{Im}\left[\int\mathrm{d}^2\theta\mathrm{d}^2\bar\theta\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial A}A^\dagger+\int\mathrm{d}^2\theta\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial \mathrm{A}^2}W^\alpha W_\alpha\right] \tag{5}$$

となる．ここで$A=\Phi^3$とした．また，プレポテンシャル$\mathcal{F}$を用いて有効複素結合定数を

$$\tau(a)=\frac{\partial^2\mathcal{F}(a)}{\partial a^2} \tag{6}$$

で表すことができる．低エネルギー有効理論の決定はこの$\mathcal{F}$を求める問題に帰着する．

## ２．双対性

有効理論の決定が$\mathcal{F}$を求めることに帰着したので，$\mathcal{F}$の具体形を考えていく．$\mathcal{F}$は(6)式の関係を用いて，超対称性をもつ理論の$\beta$関数の積分から求まる摂動項とインスタントンの寄与からくる非摂動項からなる[2]．その形は QCD スケールを$\Lambda$ ($g(\Lambda)\to\infty$が成り立つエネルギースケールのこと）として

１：日大理工・院（前）・物理

$$\mathcal{F}(a)=\frac{1}{2}\tau_{\mathrm{cl}}a^2+\frac{i}{2\pi}a^2\log\left(\frac{a^2}{\Lambda^2}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{F}_k\left(\frac{\Lambda}{a}\right)^{4k}a^2 \tag{7}$$

となる．非摂動項の係数$\mathcal{F}_k$を求め，$\mathcal{F}$を決定するためにはインスタントンの寄与の計算が必要になる．多重インスタントンの計算は非常に困難で，Seiberg-Witten理論では次節で説明するように幾何学的な議論を用いて間接的に$\mathcal{F}_k$が決定される．

β関数の解析から，理論は漸近自由性を持ち低エネルギーでは結合定数が大きい強結合領域となる．しかし，(7)式から$\tau$の虚部を求めると低エネルギーで負の値を取り，正定値性を満たさない．これは強結合領域では$\mathcal{F}$による記述が適さないことを意味する．

そこで「電磁双対性」を利用し，理論に現れる磁気的な量による記述に移す変換を考える．ラグランジアンに対する超対称性による制限を考えることで，双対変換により(5)式は

$$\mathcal{L}_{D\mathrm{eff}}=\frac{1}{4\pi}\mathrm{Im}\left[\int \mathrm{d}^2\theta\mathrm{d}^2\bar{\theta}(-A)A_D^{\dagger}+\int \mathrm{d}^2\theta\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\tau}\right)W_D^{\alpha}W_{D\alpha}\right] \tag{8}$$

と表される．双対な理論を考える利点は，双対な複素結合定数が

$$\tau_D=-\frac{1}{\tau} \tag{9}$$

と元の理論の逆数になることで強結合領域を弱結合領域として議論できるようになることである．

$W_D^{\alpha}$は電場と磁場を入れ替えたゲージ場の強さ$F_{D\mu\nu}$を含み，双対なカイラル超場$A_D$は$\mathcal{F}$を用いて

$$\frac{\partial\mathcal{F}_D}{\partial A_D}=-A\ ,\ A_D=\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial A} \tag{10}$$

と書かれる．$\mathcal{F}$で記述できない強結合領域は双対な理論を用いて解析し, スカラー場の真空期待値$a$とそれに双対な$a_D$を合わせて議論していくことにする．

３．真空のモジュライ空間とプレポテンシャル

(4)式で$a$は連続的な値を持つから，$\mathcal{N}=2$超対称ゲージ理論は無数に縮退した真空を持つ．これらの真空をラベルするため，ゲージ不変な複素パラメーターとして

$$u=\frac{1}{2}\langle\mathrm{Tr}(\phi^2)\rangle=\frac{1}{2}a^2 \tag{11}$$

を導入する．$u$の作る複素平面は各点が一つの真空に対応している．これを真空のモジュライ空間と呼ぶ．

考えている真空のモジュライ空間は$u\to\infty$の所に分岐点を持ち，その点で$a$と$a_D$が多価関数になっている．一価関数を得るために，真空のモジュライ空間のリーマン面を議論する．そのため，モジュライ空間の特異点の数が問題になる．

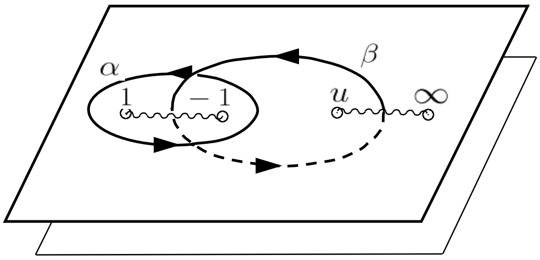



**Figure2.** Riemann surface

Seiberg と Witten は特異点についてある仮定を置き，その仮定の下で有効理論が厳密に決定されることを示した． このとき，リーマン面は図２の様に２つのカットが入った２枚のシートを張り合わせたものになる．これを張り合わせたものが図３で，それはトーラスになる．

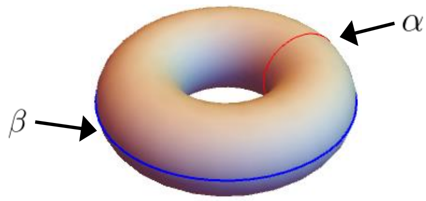



**Figure3.** Moduli space

その結果，トーラス上の周期と複素結合定数$\tau$を同一視することで$a$と$a_D$の厳密解が求まり，(10)式から$a_D$を$a$で積分することで$\mathcal{F}$を求めることができる[1][3]．

４．結論とその後の発展

有効理論の決定は$\mathcal{F}$を求める問題に帰着した．真空の構造を議論し，物理の問題を等価な幾何学の問題に置き換えることで，間接的な方法で$\mathcal{F}$を決定した．
$\mathcal{F}_k$の計算結果は，インスタントン計算の結果と一致していることが確かめられている．

その後の発展として，$\mathcal{F}$を直接的に求める方法である Nekrasov の分配関数[4]の導出も議論したい．

参考文献

[1] N. Seiberg and E. Witten , “Electric-magnetic duality monopole condensation and confinementin $N$ = 2 supersymmetric Yang-Millstheory”, Nucl. Phys. B 426(1994)19.

[2] N. Seiberg , “Supersymmetry and non-perturbative beta functions”, Phys. Lett. B 206(1988)75.

[3] E. D'Hoker , I.M. Krichever , D.H. Phong , “The effective prepotential of $N$ = 2 supersymmetric SU($N_c$) gauge theories”, Nucl. Phys. B 489(1997)179.

[4] N.A. Nekrasov , “Seiberg-Witten Prepotential from Instanton Counting”, Adv. Theor. Math. Phys.7(2003)831.